# Análisis Funcional


**Los Del DGIIM**, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

# Análisis Funcional

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2025

# Índice general

Se recomienda encarecidamente acompañar la asignatura de la lectura del libro "Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Diferential Equations", de Haim Brezis, que puede encontrarse en la bibliografía de la asignatura.

# 1. El Espacio Dual

El objetivo de este capítulo es definir el concepto de espacio dual de un espacio normado, así como sus principales propiedades, que nos dotan de muchos ejemplos de espacios de Banach. Para ello, será necesario primero repasar conceptos básicos vistos ya en asignaturas anteriores de Análisis Matemático.

## 1.1. Repaso

**Definición 1.1** (Espacio métrico)**.** Un espacio métrico es una tupla $(E, d)$ donde $E$ es un conjunto no vacío y $d : E \times E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Desigualdad triangular.** $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \qquad \forall x, y, z \in E$
- **Simetría.** $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y \in E$
- **No degeneración.** $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

**Definición 1.2** (Espacio normado)**.** Un espacio normado es una tupla $(E, \|\cdot\|)$ donde $E$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Desigualdad triangular.** $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in E$
- **Homogeneidad por homotecia.** $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E$
- **No degeneración.** $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$

A partir de estas propiedades pueden deducirse muchas otras, entre las cuales destacamos:

**Proposición 1.1.** *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado, entonces:*

- $\|0\| = 0$.
- $\|x\| \geqslant 0 \qquad \forall x \in E$.

*Demostración.* Veamos cada propiedad:

- Para la primera: $\|0\| = \|0 \cdot v\| = 0\|v\| = 0$.
- Para la segunda, basta observar que si $x \in E$, entonces:

$$0 = \|0\| = \|x + (-x)\| \leqslant 2\|x\| \Longrightarrow \|x\| \geqslant 0$$

$\square$

**Proposición 1.2.** *Si* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado y definimos la aplicación* $d : E \times E \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$d(x, y) = \|y - x\| \qquad \forall x, y \in E$$

*Se verifica que* $(E, d)$ *es un espacio métrico.*

**Definición 1.3** (Espacio métrico completo)**.** Sea $(E, d)$ un espacio métrico, decimos que es completo (o que la distancia $d$ es completa) si toda sucesión de Cauchy para la distancia $d$ es también convergente a un elemento de $E$ para la distancia $d$.

Hemos visto ya que cualquier espacio normado puede dotarse de estructura de espacio métrico, así como la definición de espacio métrico completo, ambos conceptos tratados ya en asignaturas previas.

**Definición 1.4** (Espacio de Banach)**.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, decimos que es de Banach si el espacio métrico $(E, d)$ obtenido de la forma usual a partir de la norma $\|\cdot\|$ es un espacio métrico completo.

**Definición 1.5** (Espacio prehilbertiano)**.** Un espacio prehilbertiano es una tupla $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ donde $H$ es un espacio vectorial y $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ es una aplicación que verifica:

- **Bilinealidad.** La aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es lineal en ambas variables.
- **Simetría.** $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \qquad \forall x, y \in E$
- **Definida positiva.** $\langle x, x\rangle > 0 \qquad \forall x \in H \setminus \{0\}$

**Proposición 1.3.** *Si* $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *es un espacio prehilbertiano y definimos la aplicación* $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ *dada por:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad \forall x \in E$$

*Se verifica que* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado.*

**Definición 1.6** (Espacio de Hilbert)**.** Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio prehilbertiano, decimos que es de Hilbert si el espacio normado $(E, \|\cdot\|)$ obtenido de la forma usual a partir del producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un espacio métrico de Banach.

### 1.1.1. Ejemplos

- Sea $N \in \mathbb{N}$, en $\mathbb{R}^N$ podemos definir para cada $p \geqslant 1$ la aplicación $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por:

  $$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\right)^{\dfrac{1}{p}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

  Que hace que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_p)$ sea un espacio normado, que de hecho es de Banach, como se vió en Análisis Matemático II, puesto que todo espacio normado de dimensión finita es de Banach.

- En el caso anterior, si tomamos $p = 2$ se verifica que además si definimos $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

Obtenemos que $(\mathbb{R}^N, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio prehilbertiano (compruébese) cuyo espacio normado canónico coincide con $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$, por lo que es un espacio de Hilbert.

- Como otro ejemplo de espacio normado sobre $\mathbb{R}^N$, podemos definir $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dado por:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_i| : i \in \{0, \ldots, N\}\}$$

Se cumple igualmente que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado que además es de Banach, por la misma razón que antes.

- Como primer ejemplo de espacio normado que no se construye sobre los vectores de un espacio de la forma $\mathbb{R}^N$, si tomamos un conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$, y definimos[1]:

$$\mathcal{C}_b(A) = \{f : A \to \mathbb{R} : f \text{ es continua y } f \text{ es acotada en } A\}$$

Junto con la aplicación $\|\cdot\| : \mathcal{C}_b(A) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in A\}$$

Se verifica que $(\mathcal{C}_b(A), \|\cdot\|)$ es una espacio normado que de hecho es de Banach (compruébese).

- Sea ahora $K \subset \mathbb{R}^N$ un compacto, si definimos:

$$\mathcal{C}(K) = \{f : K \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$$

resulta que podemos definir una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathcal{C}(K) \times \mathcal{C}(K) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle f, g\rangle = \int_K f(x)g(x)\ dx$$

que hace que $(\mathcal{C}(K), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ sea un espacio prehilbertiano, que nos induce un espacio normado donde la norma es:

$$\|f\|_2 = \left(\int_K f(x)^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall f \in \mathcal{C}(K)$$

Sin embargo, este espacio prehilbertiano **no es de Hilbert**:

Por ejemplo, si tomamos $K = [0, 2] \subset \mathbb{R}$, si tomamos $f_n : K \to \mathbb{R}$ de forma que la gráfica de $f_n$ sea algo parecido a la de la Figura 1.1

[1] El subíndice "b" de $\mathcal{C}_b(A)$ viene de la palabra inglesa "bounded".

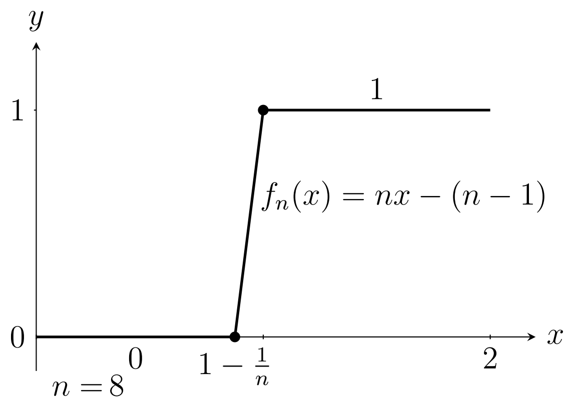



Figura 1.1: Gráfica de la función $f_n$.

Si definimos $f = \chi_{[1,2]}$ la función característica del intervalo $[1, 2]$ (que no pertence a $\mathcal{C}(K)$), tenemos que:

$$\|f - f_n\|_2^2 = \int_0^2 (f(x) - f_n(x))^2 \, dx = \frac{1}{2n} \to 0$$

Por lo que $f_n$ es una sucesión de Cauchy pero cuyo límite no está en el espacio que consideramos, por lo que no es convergente, luego $\mathcal{C}(K)$ no es un espacio completo.

## 1.2. Espacios de Lebesgue

Un ejemplo interesante de espacios de Banach son los espacios de Lebesgue, que ya se trabajaron un poco en la asignatura de Análisis Matemático II. En este documento volveremos a definir dicho espacio, puesto que la construcción es importante tenerla clara. En un primer lugar, hemos de repasar ciertas desigualdades para poder construir la estructura de espacio normado.

### 1.2.1. Desigualdades importantes

Para la primera desigualdad, es conveniente la siguiente motivación, que nos dará una breve justificación del origen de la desigualdad: sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ dos números reales no negativos, es bien conocido que:

$$0 \geqslant (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \Longrightarrow ab \leqslant \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

**Definición 1.7.** Sea $p \geqslant 1$ un número real, definimos su "exponente conjugado" por:

$$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } p \neq 1 \\ \infty & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

De esta forma (admitiendo el convenio de que $0 = {}^1/_\infty$ de la recta real extendida), tenemos que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Usaremos en esta sección la notación $p'$ para denotar al exponente conjugado de $p$.

**Proposición 1.4** (Desigualdad de Young). *Sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ y $p \in \mathbb{R}$ con $p > 1$, se verifica que:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

*Demostración.* La concavidad[2] del logaritmo nos dice:

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log\left(b^{p'}\right) = \log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

Y si ahora aplicamos la función exponencial y usamos que es creciente obtenemos:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

□

Recordemos que en Análisis Matemático I definíamos para cualquier conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ medible el conjunto de las funciones integrables sobre $\Omega$:

$$\mathcal{L}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : \int_\Omega f < \infty \right\}$$

Pues bien, dado $p \geqslant 1$, podemos definir ahora:

$$\mathcal{L}_p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega) : \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}$$

**Teorema 1.5** (Desigualdad de Hölder). *Sea $p > 1$, si $f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$ y $g \in \mathcal{L}_{p'}(\Omega)$, entonces $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$ y además:*

$$\int_\Omega |fg| \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

*Demostración.* Si notamos por comodidad:

$$\alpha = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \beta = \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Si $\alpha = 0$, entonces $f^p = 0$ casi por doquier, de donde $|fg| = 0$ casi por doquier, luego:

$$\int_\Omega |fg| = 0$$

Si $\beta = 0$ la situación es simétrica. Suponiendo ahora que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, la desigualdad de Young nos dice que:

$$\frac{|f(x)|}{\alpha}\frac{|g(x)|}{\beta} \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p\alpha^p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'\beta^{p'}} \qquad \forall x \in \Omega$$

[2]Recordamos que si $f$ era una función cóncava, entonces $f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y)$, para cualquier $t \in [0, 1]$, $x$,$y$ en el dominio de definición de $f$.

Si ahora aplicamos la integral de Lebesgue a ambos lados usando el crecimiento de dicho funcional, obtenemos que (usando la definición de $\alpha$ y $\beta$):

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_\Omega |fg| \leqslant \frac{1}{p\alpha^p}\int_\Omega |f|^p + \frac{1}{p'\beta^{p'}}\int_\Omega |g|^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

de donde $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$ y despejando de la desigualdad:

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_\Omega |fg| \leqslant 1$$

Obtenemos la desigualdad buscada. □

La desigualdad de Hölder nos proporcionará la desigualdad de Cauchy-Schwartz de la norma del futuro espacio normado, y nos permitirá probar la desigualdad de Minkowski.

**Teorema 1.6** (Desigualdad de Minkowski)**.** *Para* $p \in \mathbb{R}$ *con* $p \geqslant 1$ *y* $f, g \in \mathcal{L}_p(\Omega)$*, se cumple que:*

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

*Demostración.* Si notamos por comodidad:

$$\alpha = \left(\int_\Omega |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \beta = \left(\int_\Omega |g|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \qquad \gamma = \left(\int_\Omega |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = 1$, entonces la desigualdad triangular nos dice que $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, donde aplicamos el crecimiento de la integral y ya tenemos el Teorema demostrado. Sabemos por el resultado anterior que $\gamma < \infty$, puesto que $\mathcal{L}_p(\Omega) \subset \mathcal{L}(\Omega)$, y la desigualdad buscada es obvia si $\gamma = 0$. Supuesto ahora que $p > 1$ y $\gamma > 0$, si tomamos:

$$h = |f+g|^{p-1}$$

tenemos entonces que:

$$h^{p'} = |f+g|^{(p-1)p'} = |f+g|^p$$

luego:

$$\int_\Omega h^{p'} = \gamma^p < \infty$$

Por lo que $h \in \mathcal{L}_p(\Omega)$. Tenemos:

$$|f+g|^p = |f+g|h \leqslant |f|h + |g|h$$

Y por la desigualdad de Hölder:

$$\gamma^p \leqslant \int_\Omega |f|h + \int_\Omega |g|h \leqslant (\alpha+\beta)\left(\int_\Omega h^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = (\alpha+\beta)\gamma^{\frac{p}{p'}}$$

Y si dividimos por $\gamma^{\frac{p}{p'}}$ tenemos la desigualdad buscada. □

### 1.2.2. Definición de los espacios de Lebesgue

Fijado $p \geqslant 1$, podemos tratar de dotar a $\mathcal{L}_p(\Omega)$ de una norma. Pensamos en un principio en la aplicación $\varphi_p : \mathcal{L}_p(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\varphi_p(f) = \left( \int_\Omega |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall f \in \mathcal{L}_p(\Omega)$$

Que:

- Verifica la desigualdad triangular gracias a la desigualdad de Minkowski.
- Verifica la homegeneidad por homotecias, ya que:

  $$\varphi_p(\alpha f) = |\alpha| \varphi_p(f) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

- $\varphi_p(f) = 0 \iff f = 0$ casi por doquier.

Por lo que dicha función **no es una norma** en $\mathcal{L}_p(\Omega)$ al no verificar la no degeneración de la norma, puesto que la integral "es ciega" a la hora de diferenciar la función constantemente igual a 0 de otras funciones con integral cero.

Para solucionar el problema con el que nos acabamos de topar (el problema de no poder definir una norma de dicha forma), podemos constuir una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{L}_p(\Omega)$ que identifique a las funciones que son iguales casi por doquier, pudiendo considerar el espacio cociente:

$$L_p(\Omega) = \frac{\mathcal{L}_p(\Omega)}{\sim}$$

Donde ya $(L_p(\Omega), \varphi_p)$ sí que es un espacio normado, donde denotaremos normalmente $\varphi_p = \| \cdot \|_p$.

**Teorema 1.7** (Riesz-Fischer)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto medible y $p \geqslant 1$, se cumple que $(L_p(\Omega), \| \cdot \|_p)$ es un espacio de Banach.*

### 1.2.3. Más ejemplos de espacios de Banach

- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible, si definimos:

  $$\sup_\Omega |f| = \text{ínf}\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M \text{ casi para todo } x \in \Omega\}$$

  El conjunto:

  $$\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ es medible y } \sup_\Omega |f| < \infty \right\}$$

  junto con la norma:

  $$\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f|$$

  es un espacio de Banach, donde la desigualdad de Hölder se comple considerando que $p = \infty$ y $p' = 1$:

  Si $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$ y $g \in \mathcal{L}(\Omega)$, entonces $fg \in \mathcal{L}(\Omega)$, con:

  $$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_1$$

- Para $1 \leqslant p < \infty$ podemos considerar otro tipo de espacios:

$$l^p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\}$$

que junto con la aplicación:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in l^p$$

forman un espacio de Banach (compruébese).

En dichos espacios, se tiene que si $x \in l^p$ y $y \in l^{p'}$, entonces $xy \in l$, con:

$$\|xy\| \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p'}$$

- En el caso anterior, si $p = 2$, podemos definir la aplicación:

$$\langle x, y \rangle_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad \forall x, y \in l^2$$

Con lo que $(l^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ es un espacio de Hilbert.

- Al igual que sucedía con las normas $p-$ésimas en $\mathbb{R}^N$, podemos considerar:

$$l^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ acotada}\}$$

junto con la aplicación $\|\cdot\| : l^\infty \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$$

y obtenemos un espacio de Banach.

- $C = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ es convergente}\}$ es un subespacio de $l^\infty$.
- $C_0 = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ converge a } 0\}$ es un subespacio de $C$.

**Proposición 1.8.** *El espacio normado $l^p$ es de Banach para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

*Demostración.* **Para $p = \infty$.** Recordamos que trabajamos en el espacio:

$$l^\infty = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : x \text{ acotada}\}, \qquad \|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$$

Sea $\{x_m\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $l^\infty$, queremos probar que $\{x_m\}$ es convergente en $l^\infty$. Para ello, primero vemos que fijado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que la sucesión de números reales $\{x_m(n)\}$ es de Cauchy, pues dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $m_0 \in \mathbb{N}$ (gracias a que $\{x_m\}$ es de Cauchy) de foma que:

$$|x_p(n) - x_q(n)| \leqslant \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_p(k) - x_q(k)| = \|x_p - x_q\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant m_0$$

Como $\mathbb{R}$ es completo, tenemos que la sucesión $\{x_m(n)\}$ es convergente, para cada $n \in \mathbb{N}$, lo que nos permite definir

$$\begin{array}{rccl} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & \text{lím}\{x_m(n)\} \end{array}$$

Obteniendo que $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, y la demostración de este caso terminará probando que $x \in l^\infty$ y que $\{\|x_m - x\|\} \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de forma que de forma que:

$$\|x_p - x_q\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall p, q \geqslant m_0$$

Fijado $m \geqslant m_0$, tenemos para todo $k \in \mathbb{N}$ que:

$$|x_m(k) - x(k)| = \lim_{n\to\infty} |x_m(k) - x_n(k)| \leqslant \varepsilon$$

Por lo que $x_m - x \in l^\infty$, de donde:

$$x = x_m - (x_m - x) \in l^\infty$$

por ser $l^\infty$ un espacio vectorial. Más aún, hemos probado que:

$$\|x_m - x\|_\infty < \varepsilon \qquad \forall m \geqslant m_0$$

lo que nos dice que $\{\|x_m - x\|_\infty\} \to 0$.

**Para $1 \leqslant p < \infty$.** Trabajamos ahora en el espacio:

$$l^p = \left\{ x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p < \infty \right\}, \qquad \|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Sea $\{x_m\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $l^p$, queremos probar que $\{x_m\}$ es convergente en $l^p$. Para ello, observemos primero que:

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall x \in l^p, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

de donde deducimos que $\{x_m(k)\}$ es de Cauchy, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por ser $\mathbb{R}$ completo tenemos que dicha sucesión es convergente, lo que nos permite definir

$$\begin{array}{rccl} x: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & k & \longmapsto & \text{lím}\{x_m(k)\} \end{array}$$

Obteniendo que $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$, y basta probar que $x \in l^p$ y que $\{\|x_m - x\|\} \to 0$. Fijado $\varepsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$\|x_t - x_s\|_p < \varepsilon \qquad \forall t, s \geqslant m_0$$

fijados $m \geqslant m_0$ y $N \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\sum_{k=1}^N |x_m(k) - x_n(k)|^p \leqslant \sum_{k=1}^\infty |x_m(k) - x_n(k)|^p = (\|x_m - x_n\|)^p < \varepsilon^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde:

$$\sum_{k=1}^{N} |x_m(k) - x(k)|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |x_m(k) - x_n(k)|^p \leqslant \varepsilon^p \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

por lo que la serie $\sum_{k\geqslant 1} |x_m(k) - x(k)|^p$ es convergente, de donde $x_m - x \in l^p$, por lo que:

$$x = x_m - (x_m - x) \in l^p$$

Más aún, la última desigualdad nos dice que:

$$\|x_m - x\|_p = \lim_{N\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_m(k) - x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \varepsilon \qquad \forall m \geqslant m_0$$

de donde deducimos que $\{\|x_m - x\|\} \to 0$.

□

## 1.3. Espacio dual

Para introducir la noción de espacio dual, nos será necesario primero destacar unos resultados:

**Proposición 1.9.** *Si $H$ es un espacio prehilbertiano, entonces:*

1. *Se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwartz:*

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\| \qquad \forall u, v \in H$$

2. *Se cumple la identidad del paralelogramo:*

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\| + \left\|\frac{u-v}{2}\right\| = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2) \qquad \forall u, v \in H$$

**Teorema 1.10** (de la Proyección)**.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert, sea $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, entonces $\forall f \in H\ \exists_1 u \in K$ de forma que:*

$$\|f - u\| = d(f, K) = \inf\{d(f, v) : v \in K\}$$

*Además, dicho elemento $u$ está caracterizado por:*

- *$u \in K$.*
- *$\langle f - u, v - u\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$.*

*Por tanto, a dicho único elemento $u$ lo notaremos por $P_K f$.*

*Demostración.* Como $0 \leqslant d(f, v) \quad \forall v \in K$, tenemos entonces que dicho ínfimo existe. Tenemos por tanto que existe $\{v_n\}$ una sucesión de elementos de $K$ de forma que $\{d(f, v_n)\} \to d(f, K)$. Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y usando la identidad del paralelogramo con $f - v_n$ y $f - v_m$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{f - v_n + f - v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{f - v_n - (f - v_m)}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right) \\
\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{v_m - v_n}{2} \right\|^2 &= \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right) \\
\frac{\|v_m - v_n\|^2}{4} &= \frac{1}{2}\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right) - \left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2 \\
\|v_m - v_n\|^2 &= 2\left(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2\right) - 4\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\|^2
\end{aligned}$$

Como $K$ es convexo, tenemos que $\frac{v_n+v_m}{2} \in K$, por lo que:

$$\left\| f - \frac{v_n + v_m}{2} \right\| \geqslant d(f, K)$$

Por lo que:

$$0 \leqslant \|v_m - v_n\|^2 \leqslant 2(\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2) - 4d(f, K)^2$$

Como $\{\|f - v_n\|^2\} \to d(f, K)^2$ y $\{\|f - v_m\|^2\} \to d(f, K)^2$, tenemos por el Lema del Sandwitch que $\{\|v_n - v_m\|^2\} \to 0$, por lo que $\{v_n\}$ es de Cauchy. Como $H$ es completo, existe $u \in H$ de forma que $\{v_n\} \to u$, pero por ser $K$ cerrado tendremos que $u \in K$.

Como $\{v_n\} \to u$, tenemos entonces que $\{d(f, v_n)\} \to d(f, v)$, pero $\{d(f, v_n)\}$ convergía también a $d(f, K)$. No queda más salida que $d(f, v) = d(f, K)$.

Una vez probada la existencia de $u$, veamos que:

$$u \in K \text{ con } \|f - u\| = d(f, K) \Longleftrightarrow u \in K \text{ y } \langle f - u, v - u\rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in K$$

$\Longrightarrow$) Supongamos que $u \in K$ y sabemos que $\|f - u\| \leqslant \|f - v\|$ para todo $v \in K$. Tomamos ahora $w \in K$ y consideramos el segmento que une $u$ con $w$. Entonces $\forall w \in K$ y $\forall t \in [0, 1]$, al ser $K$ convexo tendremos que

$$(1 - t)u + tw \in K \quad \text{y} \quad \|f - u\|^2 \leqslant \|f - (1 - t)u - tw\|^2$$

Aplicando la bilinealidad podemos reescribir esta última expresión como

$$\begin{aligned}
\|f - (1 - t)u - tw\|^2 &= \langle f - (1 - t)u - tw, f - (1 - t)u - tw\rangle = \\
&= \|f - u\|^2 + t^2\|w - u\|^2 - 2t(f - u, w - u)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión que teníamos anteriormente nos queda que:

$$0 \leqslant t^2\|w - u\|^2 - 2t\langle f - u, w - u\rangle \quad \forall t \in (0, 1]$$

Al dividir entre $t$ nos queda

$$0 \leqslant t\|w - u\|^2 - 2\langle f - u, w - u\rangle \quad \forall t \in (0, 1]$$

y tomando ahora el límite cuando $t$ tiende a 0 por la derecha queda que

$$0 \leqslant -2\langle f - u, w - u\rangle \Rightarrow \langle f - u, w - u\rangle \leqslant 0 \qquad \forall w \in K$$

$\Longleftarrow$)

$$\|f-v\|^2 = \|f-u+u-v\|^2 = \|f-u\|^2 + 2\langle f-u, u-v\rangle + \|u-v\|^2 \qquad \forall v \in K$$

De donde:

$$0 \geqslant 2\langle f-u, v-u\rangle - \|u-v\|^2 = \|f-u\|^2 - \|f-v\|^2$$

Luego:

$$\|f-u\|^2 \leqslant \|f-v\|^2 \qquad \forall v \in K$$

Para probar finalmente la unicidad, supongamos que existen $u, w \in K$ de forma que:

$$\langle f-u, v-u\rangle, \langle f-w, v-w\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$$

Entonces:

$$\langle f-u, w-u\rangle, \langle f-w, u-w\rangle = \langle u-f, w-u\rangle \leqslant 0$$

Por lo que:

$$\langle f-u, w-u\rangle + \langle w-f, w-u\rangle = \langle w-u, w-u\rangle \leqslant 0$$

de donde $\langle w-u, w-u\rangle = 0$, por lo que $\|w-u\|^2 = d(w,u)^2 = 0$, luego $w = u$. $\square$

**Proposición 1.11.** *Dado $\emptyset \neq K \subset H$ un conjunto convexo y cerrado, tenemos que la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} P_K: & H & \longrightarrow & H \\ & f & \longmapsto & P_K f \end{array}$$

*es lipschitziana. De hecho:*

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leqslant \|f_1 - f_2\| \qquad \forall f_1, f_2 \in H$$

*Demostración.* Sean $f_1, f_2 \in H$, $u_1 = P_K f_1$, $u_2 = P_K f_2$, estos verifican:

$$\langle f_1 - u_1, v - u_1\rangle, \langle f_2 - u_2, v - u_2\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in K$$

Por lo que:

$$\langle f_1 - u_1, u_2 - u_1\rangle \leqslant 0$$
$$\langle f_2 - u_2, u_1 - u_2\rangle \leqslant 0 \Longrightarrow \langle f_2 - u_2, u_2 - u_1\rangle \geqslant 0$$

De donde $\langle f_1 - u_2 - f_2 + u_2, u_2 - u_1\rangle \leqslant 0$, por lo que:

$$\langle f_1 - f_2 + (u_2 - u_1), (u_2 - u_1)\rangle = \langle f_1 - f_2, u_2 - u_1\rangle + \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1\rangle$$

Luego:

$$\|u_2 - u_1\|^2 = \langle u_2 - u_1, u_2 - u_1\rangle \leqslant -\langle f_1 - f_2, u_2 - u_1\rangle \overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leqslant} \|f_1 - f_2\| \|u_2 - u_1\|$$

Por lo que:

$$\|u_2 - u_1\| \leqslant \|f_1 - f_2\|$$

Si $\|u_2 - u_1\| \neq 0$, cierto también si $\|u_2 - u_1\| = 0$. $\square$

Pensemos ahora en un ejemplo de conjuntos convexos con propiedades interesantes, como lo son los espacios vectoriales:

**Corolario 1.11.1** (Proyección Ortogonal)**.** *Sea $M \subset H$ un subespacio vectorial cerrado de $H$, un espacio de Hilbert, entonces:*

$$\forall f \in H \; \exists_1 u \in M \; \textit{tal que} \; \|f - u\| = d(f, M)$$

*Además, la caracterización de $u$ puede mejorarse por:*

$$u \in M \qquad y \qquad \langle f - u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in M$$

*Demostración.* Bajo las hipótesis de que $M$ es un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert $H$, basta probar:

$$u \in M \wedge \langle f - u, v - u \rangle \leqslant 0 \quad \forall v \in M \iff u \in M \wedge \langle f - u, w \rangle = 0 \quad \forall w \in M$$

$\Longleftarrow$) Si $v \in M$, tenemos por ser $M$ un espacio vectorial que $v - u \in M$, de donde $\langle f - u, v - u \rangle = 0$, por lo que en particular es menor o igual que 0.

$\Longrightarrow$) Si tomamos $v \in M$ y $t \in \mathbb{R}^*$, como $M$ es un espacio vectorial tendremos que $v/t \in M$, por lo que:

$$\left\langle f - u, \frac{v}{t} - u \right\rangle \leqslant 0 \qquad \forall v \in M, \forall t \in \mathbb{R}^*$$

- Si $t > 0$, entonces $\langle f - u, v - tu \rangle \leqslant 0 \; \forall v \in M$, de donde tomando límite cuando $t \to 0$, tenemos que $\langle f - u, v \rangle \leqslant 0 \; \forall v \in M$.
- Si $t < 0$, entonces $\langle f - u, v - tu \rangle \geqslant 0 \; \forall v \in M$, de donde tomando límite cuando $t \to 0$, tenemos que $\langle f - u, v \rangle \geqslant 0 \; \forall v \in M$.

En consecuencia, tenemos que $\langle f - u, v \rangle = 0 \; \forall v \in M$.

□

**Proposición 1.12.** *Sea $M \subset H$ un esubespacio vectorial cerrado de $H$, un espacio de Hilbert, la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} P_M : & H & \longrightarrow & H \\ & f & \longmapsto & P_M f \end{array}$$

*es lineal.*

*Demostración.* Sean $f_1, f_2 \in H$, $u_1 = P_M f_1$, $u_2 = P_M f_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle \lambda f_1 + f_2 - (\lambda u_1 + u_2), w \rangle &= \langle \lambda f_1 - \lambda u_1 + f_2 - u_2, w \rangle \\ &= \lambda \langle f_1 - u_1, w \rangle + \langle f_2 - u_2, w \rangle = 0 \qquad \forall w \in M \end{aligned}$$

Por lo que por el Corolario anterior, tenemos que:

$$P_M(\lambda f_1 + f_2) = \lambda u_1 + u_2 = \lambda P_M(f_1) + P_M(f_2)$$

de donde $P_M$ es lineal. □

**Definición 1.8.** Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado, definimos el espacio dual topológico de $E$ por:

$$E^* = \{f : E \to \mathbb{R} : f \text{ es lineal y continua}\}$$

Nos será necesaria la siguiente Proposición para comprender mejor las propiedades de las aplicaciones lineales. Más concretamente, la relación existente entre la acotación y la continuidad de una aplicación lineal.

**Proposición 1.13.** *Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal entre dos espacios normados $E$ y $F$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(1) $\exists M \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\|T(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E$.*

*(2) $T$ es lipschitziana.*

*(3) $T$ es continua.*

*(4) $T$ es continua en $0$.*

*(5) $T$ es acotada (es decir, si $A \subset E$ es acotado, entonces $T(A)$ es acotado).*

*(6) $T(\overline{B}(0,1))$ es acotado.*

*(7) $T(B(0,1))$ es acotado.*

*Demostración.* Veamos la equivalencia entre todas ellas:

(1) $\Longleftrightarrow$ (2) Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Sean $x, y \in E$, entonces $x - y \in E$, de donde:

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \leqslant M\|x-y\|$$

Por lo que $T$ es lipschitziana con constante de Lipschitz menor o igual que $M$.

$\Longleftarrow$) Sea $x \in E$, si $M$ es mayor o igual que la constante de Lipschitz de $T$, entonces:

$$\|T(x)\| = \|T(2x - x)\| = \|T(2x) - T(x)\| \leqslant M\|2x - x\| = M\|x\|$$

(2) $\Longrightarrow$ (3) Es conocida de Cálculo II.

(3) $\Longrightarrow$ (4) Si $T$ es continua, en particular lo es en 0.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Supuesto que $T$ es continua en 0, es decir, que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \|T(x)\| < \varepsilon \ \forall x \in B(0, \delta)$$

Tomando $\varepsilon = 1$, la continuidad nos da un $\delta$ cumpliendo la afirmación anterior. Sea $x \in E$ arbitrario, tenemos:

$$\|T(x)\| = \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\frac{\delta}{2}\frac{2\|x\|}{\delta}\right)\right\| = \frac{2\|x\|}{\delta}\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\frac{\delta}{2}\right)\right\| < \frac{2}{\delta}\|x\|$$

Ya que $\dfrac{x\delta}{2\|x\|} \in B(0, \delta)$, por lo que tomando $M = \frac{2}{\delta}$ tenemos la implicación.

(5) $\Longrightarrow$ (6) Como $\overline{B}(0,1)$ es acotado, $T(\overline{B}(0,1))$ será acotado por ser $T$ acotada.

(6) $\Longrightarrow$ (7) Como $B(0,1) \subset \overline{B}(0,1)$, entonces $T(B(0,1)) \subset T(\overline{B}(0,1))$.

(7) $\Longrightarrow$ (4) Si $\exists R \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\|T(x)\| \leqslant R$ para todo $x \in B(0,1)$, dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2R}$, si $x \in B(0,\delta)$, entonces:

$$\|T(x)\| = \left\|T\left(\frac{x}{2\|x\|}2\|x\|\right)\right\| = 2\|x\| \left\|T\left(\frac{x}{2\|x\|}\right)\right\| \leqslant 2\|x\|R < 2\delta R = \varepsilon$$

(1) $\Longrightarrow$ (5) Sea $A \subset E$ acotado, entonces $\exists r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $A \subset B(0,r)$, por lo que:

$$\|T(x)\| \leqslant M\|x\| \leqslant Mr \qquad \forall x \in A$$

De donde $T(A) \subset B(0,Mr)$, por lo que es un conjunto acotado.

□

**Proposición 1.14.** *Sea $E$ un espacio normado, observemos que $E^*$ es un espacio vectorial, sobre el que definimos la aplicación $\|\cdot\| : E^* \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| \qquad \forall f \in E^*$$

*Se verifica que:*

1. *$(E^*, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.*
2. *$(E^*, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.*
3. *Sea $f \in E^*$, entonces:*

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

4. *Sea $f \in E^*$, entonces:*

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = \inf\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

*Demostración.* Veamos cada una de las propiedades:

1. Para la primera, hemos de probar:

   - **No degeneración.** Sea $f \in E^*$ de forma que $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|f\| = 0$, entonces:

   $$0 \leqslant \|f(x)\| \leqslant 0 \quad \forall x \in \overline{B}(0,1) \Longrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

   de donde:

   $$f(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\|x\|\right) = \|x\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 0 \qquad \forall x \in E$$

   Por lo que $f = 0$.

- **Homogeneidad por homotecias.** Sea $f \in E^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}A$ :

$$\|\lambda f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\lambda f(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\lambda||f(x)| = |\lambda| \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = |\lambda|\|f\|$$

- **Desigualdad triangular.** Sean $f, g \in E^*$:

$$\begin{aligned}\|f+g\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)+g(x)| &\leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} (|f(x)| + |g(x)|) \\ &\leqslant \sup_{\|x\| \leqq 1} |f(x)| + \sup_{\|x\| \leqslant 1} |g(x)| = \|f\| + \|g\|\end{aligned}$$

2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy de elementos de $E^*$, sean $\varepsilon, r > 0$, la condición de Cauchy para $\varepsilon/r$ nos da $m \in \mathbb{N}$ de forma que si $p, q \geqslant m$, entonces:

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_p(x) - f_q(x)| = \|f_p - f_q\| < \frac{\varepsilon}{r}$$

de donde:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{r} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

pero entonces:

$$|f_p(rx) - f_q(rx)| = r|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

lo que equivale a que:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in \overline{B}(0,r)$$

Por tanto, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy para todo $x \in \overline{B}(0,r)$, pero como $r$ era arbitrario, dicha condición se cumple para todo $r \in \mathbb{R}^+$, tenemos que $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy para todo $x \in E$. Como $\mathbb{R}$ es completo, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es convergente para todo $x \in E$, lo que nos permite definir $f : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} \qquad \forall x \in E$$

Se verifica que $f$ es lineal, ya que:

$$\begin{aligned}f(\lambda x + y) &= \lim\{f_n(\lambda x + y)\} = \lim\{\lambda f_n(x) + f_n(y)\} \\ &= \lambda \lim\{f_n(x)\} + \lim\{f_n(y)\} = \lambda f(x) + f(y) \\ &\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E\end{aligned}$$

Ahora, como $\{f_n\}$ era de Cauchy, tenemos que fijado $r \in \mathbb{R}^+$ y dado $\varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que para $p, q \geqslant m$ se tiene:

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,r)$$

Fijado ahora dicho $p$, tenemos:

$$|f_p(x) - f(x)| = \lim_{q\to\infty} |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo que $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ en $B(0,r)$, para todo $r \in \mathbb{R}^+$. En particular, $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ en cada conjunto acotado de $E$. Como $\{f_n\}$ es continua $\forall n \in \mathbb{N}$ y para cada $x \in E$ tenemos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ en $B(x,1)$, entonces tenemos que $f$ es continua en $x$, de donde $f$ es continua en $E$. En consecuencia, $f \in E^*$.

Por último, para ver que $\{f_n\}$ converge a $f$, dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geqslant m$, entonces:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

de donde:

$$\|f_n - f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Por lo que $\{f_n\} \to f$.

3. La desigualdad $\geqslant$ es obvia. Para la otra, sea $x \in B(0,1)$:

$$|f(x)| = \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \|x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \|x\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

4. Buscamos probar que:

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \inf\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

$\geqslant$) Para ver que el supremo es mayor o igual que el ínfimo, veamos que el supremo pertence al conjunto de la derecha:

$$|f(x)| = \|x\| \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leqslant \|x\| \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

Por tanto, $\sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \in \{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$.

$\leqslant$) Para ver el el ínfimo es mayor o igual que el supremo, veamos que el ínfimo es un mayorante del conjunto de la izquierda, si tomamos:

$$M_0 = \inf\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in E\}$$

entonces:

$$|f(x)| \leqslant M\|x\| \leqslant M \qquad \forall x \in \overline{B}(0,1)$$

Por lo que $M_0$ es un mayorante de $\{|f(x)| : \|x\| \leqslant 1\}$, por lo que es mayor o igual que su supremo.

□

### 1.3.1. Espacio dual de un espacio de Hilbert

**Proposición 1.15.** *Se verifica que si $v \in H$, entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_v : & H & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \langle u, v\rangle \end{array}$$

*verifica que $\varphi_v \in H^*$ y en cuyo caso, $\|\varphi_v\| = \|v\|$.*

*Más aún, podemos definir*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & H & \longrightarrow & H^* \\ & v & \longmapsto & \varphi_v \end{array}$$

*que es una aplicación lineal e inyectiva.*

*Demostración.* Como el producto escalar es bilineal es evidente que $\varphi_v$ es lineal. Vemos que:

$$|\varphi_v(u) - \varphi_v(w)| = |\langle u, v\rangle - \langle w, v\rangle| = |\langle u - w, v\rangle| \leqslant \|u - w\|\|v\| \qquad \forall u, w \in E$$

Por lo que $\varphi_v$ es lipschitziana, y por la última Proposición tenemos que $\|\varphi_v\| \leqslant \|v\|$. Si $v = 0$ tenemos la igualdad de forma obvia y si $v \neq 0$, entonces:

$$\|v\| = \frac{\|v\|}{\|v\|^2} = \frac{\langle v, v\rangle}{\|v\|} = \left\langle \frac{v}{\|v\|}, v \right\rangle = \varphi_v\left(\frac{v}{\|v\|}\right)$$

luego:

$$\|v\| \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} |f(x)| = \|\varphi_v\|$$

Para ver que $\Phi$ es lineal, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u, v \in H$:

$$\Phi(\lambda u + v) = \varphi_{\lambda u+v} \overset{?}{=} \lambda\varphi_u + \varphi_v = \lambda\Phi(u) + \Phi(v)$$

donde la igualdad puede demostrarse por:

$$\varphi_{\lambda u+v}(w) = \langle w, \lambda u + v\rangle = \langle w, \lambda u\rangle + \langle w, v\rangle = \lambda\langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle = \lambda\varphi_u(w) + \varphi_v(w)$$

Como $\|\varphi_v\| = \|v\|$, obtenemos de forma inmediata la continuidad de $\Phi$, por ser una isometría.

Para ver que $\Phi$ es inyectiva, supongamos que $u, v \in H$ con $\Phi(u) = \Phi(v)$, de donde:

$$\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle \qquad \forall w \in H$$

Luego:

$$\langle u, w\rangle - \langle v, w\rangle = \langle u - v, w\rangle = 0 \qquad \forall w \in H$$

En particular, tomando $w = u - v$, tenemos que:

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle = 0$$

Por lo que $u = v$, de donde $\Phi$ es inyectiva. □

**Teorema 1.16** (de Riesz-Fréchet, Representación del dual de un Hilbert).
*Sea $H$ un espacio de Hilbert, $\forall \varphi \in H^* \ \exists_1 v \in H$ de forma que:*

$$\varphi(u) = \langle u, v\rangle \qquad \forall u \in H$$

*y además:*

$$\|\varphi\| = \|v\|$$

*Demostración.* Si conseguimos probar la primera parte del Teorema, la segunda la tendremos ya probada gracias a la Proposición anterior. Sea por tanto $f \in H^*$, si $f = 0$ tomando $v = 0$ se tiene la tesis. Suponemos por tanto que $f \neq 0$, por lo que $M = f^{-1}(\{0\}) \subsetneq H$ es un espacio vectorial de $H$ distinto del trivial. Como $f$ es continua, tenemos además que $M$ es un conjunto cerrado.

Como $M \subsetneq H$, podemos tomar $z_o \in H \setminus M$. Por el Teorema de la Proyección Ortogonal, tomamos $z_1 = P_M z_0 \in M$, que verifica:

$$\langle z_0 - z_1, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in M$$

Como $z_0 \in H \setminus M$ y $z_1 \in M$, tenemos que $z_0 \neq z_1$, lo que nos permite definir:

$$z = \frac{z_0 - z_1}{\|z_0 - z_1\|}$$

Con esta definición, es claro que $\|z\| = 1$, así como que:

$$\langle z, v\rangle = \frac{1}{\|z_0 - z_1\|}\langle z_0 - z_1, v\rangle = 0 \qquad \forall v \in M$$

Como $z_0 \notin M$ la situación $z \in M$ es imposible, por lo que $z \notin M$, luego $f(z) \neq 0$. Veamos ahora que:

$$x - \frac{f(x)}{f(z)} z \in M \qquad \forall x \in H$$

ya que:

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)}f(z) = 0$$

Por lo que tenemos que:

$$\left\langle z, x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right\rangle = 0$$

Pero tenemos:

$$0 = \left\langle z, x - \frac{f(x)}{f(z)}z\right\rangle = \langle z, x\rangle - \frac{f(x)}{f(z)}\langle z, z\rangle = \langle z, x\rangle - \frac{f(x)}{f(z)}\|z\|^2$$

Por lo que podemos despejar $f(x)$, obteniendo:

$$f(x) = f(z)\langle z, x\rangle = \langle x, z f(z)\rangle \qquad \forall x \in H$$

En consecuencia, tomando $v = z f(z)$ tenemos la existencia probada.

Para la unicidad, supongamos que $\exists v, w \in H$ de forma que:

$$\langle x, v\rangle = f(x) = \langle x, w\rangle \qquad \forall x \in H$$

En consecuencia:

$$\langle x, v - w\rangle = 0 \qquad \forall x \in H$$

Luego si tomamos $x = v - w$:

$$\|v - w\|^2 = \langle v - w, v - w\rangle = 0$$

Por lo que $v = w$. □

A partir del Teorema anterior tenemos que $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$, $l^2$ y $L^2(\Omega)$ son todos isomorfos a sus duales.

**Ejercicio 1.3.1.** Calcular el dual de $l^p$, para $p > 1$, $p \neq 2$.

Puede encontrarse en la Sección 1.6.

**Notación.** Si $x \in E$ y $f \in E^*$, a menudo notaremos:

$$\langle f, x\rangle = f(x)$$

Esta notación se debe a que la evaluación de una aplicación lineal y continua $f$ en un punto $x$ cumplen unas propiedades que nos recuerdan a la del producto escalar:

1. $\langle \lambda f + g, x\rangle = \lambda\langle f, x\rangle + \langle g, x\rangle$.
2. $\langle f, \lambda x + y\rangle = \lambda\langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle$.
3. $\langle f, x\rangle \leqslant \|f\|\|x\|$.

## 1.4. Teorema de Hahn-Banach

Si tenemos un espacio normado $E$ de dimensión finita, resulta fácil dar una aplicación lineal y continua $f : E \to \mathbb{R}$, pero en dimensión finita el problema se complica. A continuación veremos el Teorema de Hahn-Banach, que entre sus muchas utilidades una de ellas es probar que si $E$ es un espacio normado de dimensión infinita entonces $E^* \neq \{0\}$. Para resolver este problema, como somos capaces de calcular aplicciones lineales y continuas en dimensión finita y dentro de espacios de dimensión infinita somos capaces de encontrar espacios de dimensión finita, nos preguntamos:

**Problema**
Sea $E$ un espacio de Banach, $G \subset E$ un subespacio suyo y $g : G \to \mathbb{R}$ lineal y continua, ¿podemos garantizar entonces que existe $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua tal que $f\big|_G = g$?

Como ya vimos en la Proposición 1.13, que $g$ sea continua significa que $\exists k \in \mathbb{R}^+$ de forma que $|g(x)| \leqslant k\|x\|$ $\forall x \in G$. Para resolver el problema, necesitamos encontrar una aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y $k' \in \mathbb{R}^+$ de forma que:

$$f\big|_G = g \qquad \text{y} \qquad |f(x)| \leqslant k'\|x\| \qquad \forall x \in E$$

**Ejercicio 1.4.1.** Sea $p : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$p(x) = k\|x\| \qquad \forall x \in E$$

Demostrar que la función $p$ verifica:

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E.$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E.$

*Demostración.* Sean $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$p(x+y) = k\|x+y\| \leqslant k(\|x\| + \|y\|) = k\|x\| + k\|y\| = p(x) + p(y)$$
$$p(\lambda x) = k\|\lambda x\| = \lambda k\|x\| = \lambda p(x)$$

□

Aunque no lo demostraremos, el Teorema de Hahn-Banach resulta ser equivalente al axioma de elección. Para realizar la demostración del Teorema de Hahn-Banach es necesario usar el Lema de Zorn, por lo que conviene realizar un breve repaso del mismo.

### Lema de Zorn

**Definición 1.9.** Sea $\emptyset \neq P$ un conjunto con una relación $\leqslant$ de orden, es decir, una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva, decimos que:

- Un subconjunto $Q \subset P$ es <u>totalmente ordenado</u> si:
$$\forall a, b \in Q \Longrightarrow a \leqslant b \ \vee \ b \leqslant a$$
- Si $Q \subset P$ y $x \in P$, decimos que $x$ es una <u>cota superior</u> de $Q$ si y solo si:
$$a \leqslant x \qquad \forall a \in Q$$
- Si $m \in P$, decimos que $m$ es un <u>elemento maximal</u> de $P$ si y solo si:
$$\{x \in P : m \leqslant x\} = \{m\}$$
- Diremos que $P$ es <u>inductivo</u> si todo subconjunto $Q \subset P$ que sea totalmente ordenado posee una cota superior.

**Lema 1.17** (de Zorn)**.** *Si $P$ es un conjunto no vacío con una relación de orden $\leqslant$ y $P$ es inductivo, entonces $P$ tiene un elemento maximal.*

**Teorema 1.18** (de Hahn-Banach, versión analítica)**.** *Sea $E$ un espacio vectorial, sea $p : E \to \mathbb{R}$ una aplicación verificando:*

- $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E.$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in E.$

*Sea $G \subset E$ un subespacio vectorial y $g : G \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que*

$$g(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in G$$

*Entonces, $\exists f : E \to \mathbb{R}$ lineal de forma que:*

1. $f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E$.
2. $f\big|_G = g$.

*Demostración.* Definimos el conjunto $P$ de todas aquellas aplicaciones lineales $h$ que tienen por dominios subespacios vectoriales de $E$ que contienen a $G$ de forma que $h\big|_G = g$ y que cumplen la desigualdad $h(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(h)$ (donde $D(h)$ denota el dominio de $h$); es decir:

$$P = \left\{ h : D(h) \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} G \subset D(h) \text{ subespacio vectorial de } E \\ h(x) = g(x) \quad \forall x \in G \\ h \text{ lineal y } h(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(h) \end{array} \right\}$$

Tendremos entonces en $P$ todas aquellas alicaciones lineales definidas en espacios vectoriales que son extensiones de $g$ y que cumplen la condición de estar dominadas por $p$. Buscamos aplicar el Lema de Zorn sobre $P$, obteniendo un elemento maximal que luego probaremos que ha de tener como dominio $E$.

Hemos pues de definir una relación de orden en $P$ que nos permita conseguir lo que queremos. Para ello, definiremos la relación $\leqslant$ de la siguiente forma:

$$h_1 \leqslant h_2 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2\big|_{D(h_1)} = h_1 \end{array} \right. \qquad \forall h_1, h_2 \in P$$

es decir, $h_1 \leqslant h_2$ si $h_2$ es una extensión de $h_1$. Podemos comprobar que esta efectivamente es una relación de orden en $P$:

- **Reflexiva.** Si $h \in P$, trivialmente tenemos que $D(h) \subset D(h)$ y $h\big|_{D(h)} = h$, lo que nos dice que $h \leqslant h$.

- **Antisimétrica.** Sean $h_1, h_2 \in P$ de forma que $h_1 \leqslant h_2$ y $h_2 \leqslant h_1$, entonces:

$$D(h_1) \subset D(h_2) \ \wedge \ D(h_2) \subset D(h_1) \Longrightarrow D(h_1) = D(h_2)$$

  Y de esta condición junto con $h_2 = h_2\big|_{D(h_2)} = h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$ concluimos que $h_2 = h_1$.

- **Transitiva.** Si $h_1, h_2, h_3 \in P$ con $h_1 \leqslant h_2$ y $h_2 \leqslant h_3$, tenemos entonces que $D(h_1) \subset D(h_2)$ y que $D(h_2) \subset D(h_3)$. La transitividad de $\subset$ nos dice que $D(h_1) \subset D(h_3)$. Ahora, si tenemos que $h_3\big|_{D(h_2)} = h_2$ y que $h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$, obtenemos que:

$$h_3\big|_{D(h_1)} = h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$$

  De donde $h_1 \leqslant h_3$.

Tratemos ahora de probar que $P$ es inductivo. Para ello, sea $Q \subset P$ un subconjunto totalmente ordenado, para buscar una cota superior de $Q$ consideraremos:

$$V_0 = \bigcup_{h \in Q} D(h)$$

Vemos que $V_0$ es un subespacio vectorial de $E$, ya que si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $u, v \in V_0$, tenemos entonces que $\exists h, h' \in Q$ de forma que $u \in D(h), v \in D(h')$. Como $Q$ es totalmente ordenado, tendremos entonces que $h \leqslant h'$ o que $h' \leqslant h$. Supondremos sin pérdida de generalidad que $h \leqslant h'$, lo que nos dice que $D(h) \subset D(h')$, por lo que $u \in D(h')$ y como $D(h')$ es un subespacio vectorial de $E$, tenemos entonces que:

$$\alpha u + v \in D(h') \subset V_0$$

Una vez salvada esta cuestión, definimos $h_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ por:

$$h_0(x) = h(x) \qquad \text{si } x \in D(h)$$

que está bien definida, ya que si $x \in D(h_1) \cap D(h_2)$, sucederá bien $h_1 \leqslant h_2$ bien $h_2 \leqslant h_1$, luego suponiendo que $h_1 \leqslant h_2$, tendremos que $h_2\big|_{D(h_1)} = h_1$, luego se cumplirá $h_1(x) = h_2(x)$. Además $h_0$ es lineal, ya que si $x, y \in V_0$, por ser $V_0$ espacio vectorial tendremos que $x + y \in V_0$, de donde $\exists h, h', h'' \in Q$ de forma que $x \in D(h)$, $y \in D(h')$, $x + y \in D(h'')$, con lo que:

$$h_0(x + y) = h''(x + y) = h''(x) + h''(y) = h(x) + h'(y) = h_0(x) + h_0(y)$$

Y finalmente es claro que $h_0(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in V_0$, puesto que si $x \in V_0$, entonces $\exists h \in Q$ de forma que $x \in D(h)$, con lo que:

$$h_0(x) = h(x) \leqslant p(x)$$

En definitiva, tenemos que $h_0$ es una aplicación lineal extensión de $g$ que cumple $h(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in V_0$ y con $V_0$ un subespacio vectorial de $E$ que claramente contiene a $G$, con lo que $h_0 \in P$ y además tenemos que $h \leqslant h_0$ $\forall h \in Q$, por lo que $h_0$ es una cota superior de $Q$, de donde tenemos que $P$ es inductivo. Por el Lema de Zorn, existe $f \in P$ elemento maximal de $P$.

Para concluir la demostración del Teorema, nos falta probar que si $f$ es un elemento maximal de $P$ entonces $D(f) = E$. Para ello, supongamos por reducción al absurdo que fuese $D(f) \subsetneq E$, luego existe $x_0 \in E \setminus D(f)$. Si consideramos[3]:

$$D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$$

Tenemos que si $v \in D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$, entonces $v$ se escribe como $v = x + tx_0$, con $x \in D(f)$ y $t \in \mathbb{R}$, lo que nos permite definir $\hat{f} : D(f) \oplus \mathbb{R}x_0 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\hat{f}(x + tx_0) = f(x) + t\alpha$$

Siendo $\alpha$ un número real que por ahora no concretaremos (puesto que necesitamos buscar luego una condición sobre $\alpha$ para garantizar que $\hat{f} \in P$). Veamos que $\hat{f} \in P$:

[3] Aquí hemos usado $\mathbb{R}x_0 := \{rx_0 : r \in \mathbb{R}\}$, que es un subespacio vectorial de $E$ de dimensión 1.

- Es automático que $\hat{f}\big|_{D(f)} = f$, por lo que $\hat{f}(x) = g(x) \quad \forall x \in G$.
- $D(f) \oplus \mathbb{R}x_0$ es un subespacio vectorial de $E$ que contiene a $G$.
- Es fácil ver que $\hat{f}$ es lineal, ya que si $x, y \in D(f)$ y $t, t' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\hat{f}(x + tx_0 + y + t'x_0) &= \hat{f}((x + y) + (t + t')x_0) = f(x + y) + (t + t')\alpha \\ &= f(x) + f(y) + t\alpha + t'\alpha = \hat{f}(x + tx_0) + \hat{f}(y + t'x_0)\end{aligned}$$

- Tenemos que ver finalmente que

$$\hat{f}(x + tx_0) \leqslant p(x + tx_0) \qquad \forall x \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

que sucede si y solo si:

$$t\hat{f}(z + x_0) = \hat{f}(tz + tx_0) \leqslant p(tz + tx_0) = p(t(z + x_0)) \qquad \forall z \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

  - En el caso $t = 0$ la desigualdad es obvia.
  - Si $t > 0$, tenemos que:

$$t(f(z) + \alpha) = t\hat{f}(z + x_0) \leqslant p(t(z + x_0)) = tp(z + x_0) \qquad \forall z \in D(f)$$

    que es equivalente a

$$\alpha \leqslant -f(z) + p(z + z_0) \qquad \forall z \in D(f)$$

  - Si $t < 0$, tenemos:

$$-t(-f(z)-\alpha) = -t\hat{f}(-z-x_0) = t\hat{f}(z+x_0) \leqslant p(t(z+x_0)) = -tp(-z-x_0) \\ \forall z \in D(f)$$

    que es equivalente a

$$-f(z) - p(-z - x_0) \leqslant \alpha \qquad \forall z \in D(f)$$

En definitiva, ver (1.1) es equivalente a ver que:

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

que a su vez equivale a:

$$\sup\{f(w) - p(w - x_0) : w \in D(f)\} \leqslant \alpha \leqslant \inf\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Por tanto, si probamos que el supremo de la izquierda es menor o igual que el ínfimo de la derecha, elegiendo $\alpha$ cualquier valor real comprendido entre ambos (o incluso igual al supremo o al ínfimo) habremos construido una aplicación $\hat{f}$ que cumple con los tres puntos anteriores y con la condición (1.1), que es la condición que veníamos buscando.

Para demostrar la desigualdad entre supremo e ínfimo, basta observar que para $z, w \in D(f)$ se verifica:

$$f(z)+f(w) = f(z+w) \leqslant p(z+w) = p(z+x_0-x_0+w) \leqslant p(z+x_0)+p(w-x_0)$$

y despejando llegamos a que:

$$f(w) - p(w - x_0) \leqslant -f(z) + p(z + x_0) \qquad \forall z, w \in D(f)$$

Lo que demuestra que:

$$\sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \leqslant \text{ínf}\{-f(z) + p(z + x_0) : z \in D(f)\}$$

Como hemos comentado anteriormente, tomando por ejemplo:

$$\alpha = \sup\{f(-z) - p(-z - x_0) : z \in D(f)\} \in \mathbb{R}$$

en la definición de $\hat{f}$ nos garantiza la condición (1.1), que junto con las otras condiciones nos dice que $\hat{f} \in P$. Además, por la definición de $\hat{f}$ es claro que $f \leqslant \hat{f}$, donde $f$ era un elemento maximal de $P$. Hemos llegado a una contradicción, que venía de suponer que $D(f) \subsetneq E$, por lo que $D(f)$ ha de ser igual a $E$, luego hemos encontrado la aplicación que el Teorema enunciaba, lo que concluye la demostración.

□

Volviendo al caso que nos interesaba, tenemos ya respuesta al Teorema anteriormente planteado:

**Corolario 1.18.1.** *Sea $E$ un espacio vectorial, $G \subset E$ un subespacio vectorial suyo y $g : G \to \mathbb{R}$ lineal y continua, existe entonces $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua de forma que $f\big|_G = g$. Además:*

$$\|f\| = \|g\|$$

*Demostración.* Como $g$ es una aplicación lineal y continua, si recordamos que:

$$\|g\| = \text{ínf}\{M > 0 : |g(x)| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in G\}$$

Si definimos $p : E \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = \|g\|\|x\|$ para $x \in E$, vimos en el Ejercicio 1.4.1 que $p$ verificaba:

- $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E$
- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E$

y la condición que hemos expresado arriba nos dice que $g(x) \leqslant p(x)$ para todo $x \in G$. Aplicando el Teorema de Hahn-Banach, tenemos que existe una aplicación $f : E \to \mathbb{R}$ lineal que verifica:

- $f\big|_G = g$
- $f(x) \leqslant p(x) \qquad \forall x \in E$

falta ver que $f$ es continua para acabar la demostración. Para ello, observemos que la condición $f(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E$ implica:

$$-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x) = \|g\|\|-x\| = \|g\|\|x\| = p(x) \qquad \forall x \in E$$

Por lo que tenemos que $|f(x)| \leqslant \|g\|\|x\| \quad \forall x \in E$, y vimos en la Proposición 1.13 que esta condición para una aplicación lineal era equivalente a que la aplicación sea continua. Además, esta desigualdad implica que $\|f\| \leqslant \|g\|$. Si notamos ahora que:

$$|g(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \qquad \forall x \in G$$

Deducimos entonces que $\|g\| \leqslant \|f\|$, por lo que $\|f\| = \|g\|$. □

**Corolario 1.18.2.** *Sea $E$ un espacio vectorial, $\forall x_0 \in E$ $\exists f_0 \in E^*$ de forma que:*

$$\|f_0\| = \|x_0\| \quad y \quad f_0(x_0) = \|x_0\|^2$$

*Demostración.* Si $x_0 = 0$, tomando $f_0 = 0$ se tiene. Suponemos por tanto que $x_0 \neq 0$. Sea $G = \mathbb{R}x_0$, defino $g : G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(tx_0) = t\|x_0\|^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

es fácil ver que $g$ es lineal. Además es continua, ya que:

$$|g(tx_0)| = |t|\|x_0\|^2 = \|x_0\|\|tx_0\| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

en particular, acabamos de ver que $\|g\| \leqslant \|x_0\|$, pero como:

$$|g(x_0)| = \|x_0\|^2 = \|x_0\|\|x_0\|$$

deducimos que $\|g\| = \|x_0\|$. Aplicando el Corolario anterior, existe $f_0 \in E^*$ lineal y continua de forma que:

$$f_0\big|_G = g \qquad \|f_0\| = \|g\| = \|x_0\|$$

de donde:

$$f_0(x_0) = f_0\big|_G(x_0) = g(x_0) = \|x_0\|^2$$

□

**Corolario 1.18.3.** *Para todo $x_0 \in E$ se tiene que:*

$$\|x_0\| = \sup\{|f(x_0)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\} = \max\{|f(x_0)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\}$$

*Demostración.* Si $x_0 = 0$, cualquier aplicación lineal cumple $f(0) = 0$, luego es obvio el resultado. Supuesto que $x_0 \in E\setminus\{0\}$, dada $f \in E^*$ con $\|f\| \leqslant 1$, tenemos entonces que:

$$|f(x_0)| \leqslant \|f\|\|x_0\| \leqslant \|x_0\| \Longrightarrow \|x_0\| \geqslant \sup\{|f(x_0)| : f \in E^*, \|f\| \leqslant 1\}$$

Para la otra desigualdad, por el Corolario anterior para $x_0$ sabemos que $\exists f_0 \in E^*$ de forma que:

$$\|f_0\| = \|x_0\|, \qquad f_0(x_0) = \|x_0\|^2$$

Si tomamos $f = {}^{f_0}/_{\|x_0\|}$, tenemos entonces que:

$$\|f\| = \left\|\frac{f_0}{\|x_0\|}\right\| = \frac{\|f_0\|}{\|x_0\|} = 1$$

Y además:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0)}{\|x_0\|} = \frac{\|x_0\|^2}{\|x_0\|} = \|x_0\|$$

Por lo que el supremo se alcanza, luego es un máximo. □

### 1.4.1. Versiones geométricas del Teorema

Aunque no lo demostraremos, las sucesivas versiones geométricas del teorema de Hahn-Banach son equivalentes a la ya vista. Para realizar la formulación del Teorema será necesario tener claros ciertos conceptos:

**Definición 1.10** (Hiperplano afín)**.** Sea $E$ un espacio vectorial, un hiperplano afín de $E$ es un subconjunto $H \subset E$ de la forma:

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\})$$

donde $f : E \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal no nula y $\alpha \in \mathbb{R}$. En dicho caso, escribiremos $H = [f = \alpha]$.

*Observación.* Cuando trabajábamos en asignaturas anteriores en espacios vectoriales de dimensión finita (digamos $n$), para nosotros un hiperplano era un subespacio vectorial de dimensión $n-1$. Ahora, si nos encontramos en un espacio vectorial $E$ genérico (no necesariamente de dimensión finita), el primer Teorema de Isomorfía de aplicaciones lineales aplicado a $f$ nos da el isomorfismo lineal

$$E/\ker f \cong \mathrm{Im} f$$

Como $f$ era lineal, ha de ser obligatoriamente $\dim \mathrm{Im} f = 1$. Observemos que en el caso $H = [f = 0] = \ker f$, tenemos que $\dim(E/H) = 1$, de donde si $E$ es de dimensión finita, tenemos $\dim H = \dim E - 1$. Si consideramos ahora $H = [f = \alpha]$ con $\alpha \neq 0$, tenemos que:

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\} = \{x + v : x \in E, v \in \ker f, f(x) = \alpha\}$$

Por lo que podemos ver $H$ como un trasladado de $\ker f$, como un hiperplano afín, con espacio de direcciones $\ker f$.

**Proposición 1.19.** *El hiperplano $H = [f = \alpha]$ es cerrado si y solo si $f$ es continua.*

*Demostración.* Por doble implicación:

$\Longleftarrow$) Si $f$ es continua, tenemos que $H = f^{-1}(\{\alpha\})$, por lo que $H$ será un conjunto cerrado, como imagen inversa de un conjunto cerrado por una aplicación continua.

$\Longrightarrow$) Supuesto que $H$ es cerrado, tenemos entonces que $E \setminus H$ es abierto y no vacío (ya que $f$ no se anula totalmente). Sea $x_0 \in E \setminus H$ de forma que $f(x_0) \neq \alpha$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f(x_0) < \alpha$.

Fijado $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset E \setminus H$, se cumple que $f(x) < \alpha$ $\forall x \in B(x_0, r)$, ya que si $f(x_1) > \alpha$ para cierto $x_1 \in B(x_0, r)$. El segmento:

$$\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1 : t \in [0, 1]\}$$

está contenido en $B(x_0, r) \subset E \setminus H$, por lo que $f(x_t) \neq \alpha \quad \forall t \in [0, 1]$, pero si tomamos:

$$t = \frac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)}$$

tendremos que $f(x_t) = \alpha$, lo que lleva a una contradicción. En definitiva, tenemos que:

$$f(x_0 + rz) < \alpha \qquad \forall z \in B(0,1)$$

de donde $f$ es continua.

$\square$

La condición que nos va a interesar es buscar bajo qué condiciones cuando nos dan dos subconjuntos de un espacio normado vamos a poder separarlos mediante un hiperplano afín. Para ello, es necesario formalizar la idea de "separar dos subconjuntos de un espacio".

**Definición 1.11.** Sea $E$ un espacio vectorial, $A, B \subset E$, diremos que el hiperplano $H = [f = \alpha]$ separa $A$ y $B$ si:

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

Además, diremos que la separación es estricta (o que $H$ separa estrictamente $A$ y $B$) si $\exists \varepsilon > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant f(y) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B$$

**Teorema 1.20** (Hahn Banach, primera versión geométrica)**.** *Sea $E$ un espacio normado, $\emptyset \neq A, B \subset E$ con $A \cap B = \emptyset$, ambos convexos y $A$ abierto, entonces existe un hiperplano cerrado*[4] *$H = [f = \alpha]$ que separa $A$ y $B$.*

*Demostración.* El Teorema se demuestra en dos pasos:

**Paso 1.** Supongamos en una versión más débil que $B$ se reduce a un punto, es decir, existe $x_0 \in E$ de forma que $B = \{x_0\}$ y que $A \subset E$ es un conjunto abierto y convexo de forma que $x_0 \notin A$.

Elegimos $z_0 \in A$ y definimos $C = A - z_0$, que:

- Contiene al 0, ya que como $z_0 \in A$, entonces $0 = z_0 - z_0 \in C$.
- Es abierto, ya que si consideramos la traslación según el vector $z_0$:

$$\begin{array}{rccl} t_{z_0}: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x + z_0 \end{array}$$

  tenemos que $t_{z_0}$ es una aplicación continua, con inversa $t_{z_0}^{-1} = t_{-z_0}$. Como $C = t_{-z_0}(A) = t_{z_0}^{-1}(A)$ y tenemos que $A$ era abierto y $t_{z_0}$ una aplicación continua, concluimos que $C$ es abierto.
- Es convexo, ya que si $x, y \in C = A - z_0$ tenemos entonces que existen $u, v \in A$ de forma que:

$$x = u - z_0, \qquad y = v - z_0$$

  Si tomamos $t \in [0,1]$, entonces:

$$tx + (1-t)y = t(u - z_0) + (1-t)(v - z_0) = \underbrace{tu + (1-t)v}_{\in A} - z_0 \in C$$

[4]Luego habrá una aplicación lineal y contina $f : E \to \mathbb{R}$, por lo que $E^* \neq \{0\}$.

El punto $y_0 = x_0 - z_0 \notin C$, de donde $y_0 \neq 0$. Por lo que $\mathbb{R}y_0$ es un subespacio vectorial de $E$ de dimensión 1. Definimos $G = \mathbb{R}y_0$ y tomamos

$$\begin{array}{rccc} g: & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ty_0 & \longmapsto & t \end{array}$$

que es una aplicación lineal (compruébese) y verificando $g(y_0) = 1$. La función $g$ nos permitirá "separar el corte de $C$ con $G$ y el punto $y_0$". En este punto conviene estudiar el funcional de Minkowski del conjunto $C$, que se define en la Definición 1.12 y cuyas propiedades se aclaran en la Proposición 1.21. Sea $p$ el funcional de Minkowski de $C$, veamos que $p$ domina a $g$:

- Si $t \geqslant 0$, como $y_0 \notin C$ entonces[5] $p(y_0) \geqslant 1$, de donde:

$$g(ty_0) = t \leqslant tp(y_0) \overset{(1)}{=} p(ty_0)$$

- Si $t < 0$, tenemos que:

$$g(ty_0) = t < 0 \leqslant p(ty_0)$$

En cualquier caso, $g(ty_0) \leqslant p(ty_0)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Nos encontramos en las hipótesis del Teorema de Hahn-Banach, por lo que podemos encontrar $f : E \to \mathbb{R}$ lineal de forma que:

$$f\big|_G = g \qquad \text{y} \qquad f(y) \leqslant p(y) \quad \forall y \in E$$

La propiedad 2 del funcional nos dice que $\exists M > 0$ de forma que:

$$f(y) \leqslant p(y) \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in E$$

Si aplicamos esta propiedad para $-y$:

$$-f(y) = f(-y) \leqslant M\|-y\| = M\|y\|$$

De donde:

$$|f(y)| \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in E$$

Como $f$ es lineal, la Proposición 1.13 nos dice que $f$ es continua.

Si ahora usamos la propiedad 3 del funcional de Minkoski, observamos que:

$$f(x) \leqslant p(x) < 1 = f(y_0) \qquad \forall x \in C$$

por lo que el hiperplano cerrado $H' = [f = 1]$ separa $C$ y $B' = \{y_0\}$.

Si volvemos al problema de separar $A$ y $B = \{x_0\}$, observamos que:

$$f(x) = f(y + z_0) = f(y) + f(z_0) \leqslant 1 + f(z_0) = f(y_0 + z_0) = f(x_0) \qquad \forall x \in A$$

Por lo que el hiperplano cerrado $H = [f = f(x_0)]$ separa $A$ y $B = \{x_0\}$, como queríamos probar en este primer paso.

[5] Usando la propiedad 3 del funcional.

**Paso 2.** Volviendo al caso que nos plantea el Teorema siendo $B$ un conjunto convexo y disjunto de $A$, tomamos:

$$A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$$

Observemos que:

- $0 \notin A - B$, ya que $A \cap B = \emptyset$.
- $A - B$ es abierto, ya que podemos escribir:

$$A - B = \bigcup_{b \in B} (A - b)$$

  y en la demostración del paso anterior ya probamos que la traslación de unconjunto abierto sigue siendo abierto.
- $A - B$ es convexo, ya que si $\alpha, \beta \in A - B$, existen $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ de forma que:

$$\alpha = a - b, \qquad \beta = a' - b'$$

  Por lo que:

$$t\alpha + (1-t)\beta = t(a-b) + (1-t)(a'-b') = \underbrace{ta + (1-t)b}_{\in A} - [\underbrace{tb + (1-t)b'}_{\in B}] \in C$$

  donde hemos usado que tanto $A$ como $B$ son convexos.

Estamos en las condiciones del paso anterior, por lo que existen $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que el hiperplano cerrado $H = [f = \alpha]$ separa $A - B$ del conjunto $\{0\}$, es decir:

$$f(a) - f(b) = f(a - b) \leqslant \alpha \leqslant f(0) = 0 \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

de donde:

$$f(a) \leqslant \alpha - f(b) \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Por lo que el hiperplano cerrado $H' = [f = \alpha - f(b)]$ separa los conjuntos $A$ y $B$.

$\square$

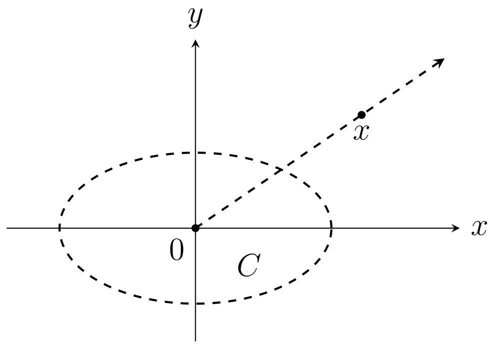
### Funcional de Minkowski de un conjunto

En este subapartado definiremos el funcional de Minkowski de un conjunto, una cierta aplicación con propiedades interesantes que nos permite realizar la demostración de la primera versión geométrica del Teorema de Hahn Banach y que además tiene cierto interés fuera de esta demostración, como luego se pondrá de manifiesto en los ejercicios a realizar.

**Definición 1.12** (Funcional de Minkowski)**.** Sea $E$ un espacio normado y $C \subset E$ un conjunto convexo, abierto y con $0 \in C$, definimos el funcional de Minkowski de $C$ como la aplicación $p : E \to \mathbb{R}$ dada por:

$$p(x) = \text{ínf}\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} \qquad \forall x \in E$$

*Observación.* Bajo las hipótesis de la definición del funcional de Minkowski, observamos que lo que estamos haciendo es, fijado un punto $x \in E \setminus \{0\}$, tomar la recta de origen 0 que pasa por $x$, y si multiplicamos $x$ por un escalar positivo, nos movemos por dicha recta. En particular, si multiplicamos $x$ por el inverso de un escalar positivo, si aumentamos dicho escalar, nos estaremos acercando a 0, y si decrementamos dicho escalar, nos alejaremos de 0. Notemos que lo que estamos haciendo por la definición del funcional de Minkowski es tomar aquel valor más "pequeño" para el cual si multiplicamos $x$ por el inverso de un escalar que se queda por encima suya no nos saldremos del conjunto $C$.




Observemos que $p(0) = 0$. Además, el funcional de Minkowski tiene ciertas propiedades resaltables.

**Proposición 1.21.** *Sea $E$ un espacio normado y $C \subset E$ un conjunto convexo, abierto y con $0 \in C$, el funcional de Minkowski verifica:*

1. $p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$
2. $\exists M > 0$ *tal que* $0 \leqslant p(x) \leqslant M\|x\| \qquad \forall x \in E$
3. $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$
4. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \qquad \forall x, y \in E$

*Demostración.* Demostramos cada una de las propiedades:

1. Para la primera, basta usar que $\lambda > 0$ y observar:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha/\lambda} = \frac{\lambda x}{\alpha} \in C\right\} = \inf\left\{\lambda\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} \\ &= \lambda \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \lambda p(x) \qquad \forall x \in E \end{aligned}$$

2. Dado $x \in E$, como $0 \in C$ es abierto $\exists r > 0$ de forma que $B(0, r) \subset C$. Si tomamos:

$$\alpha > \frac{\|x\|}{r} \Longrightarrow \left\|\frac{x}{\alpha}\right\| < r \Longrightarrow \frac{x}{\alpha} \in B(0, r) \subset C$$

Por tanto:

$$\left]\frac{\|x\|}{r}, +\infty\right[ \subset \left\{\alpha \in \mathbb{R}^+ : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$

de donde el ínfimo de la derecha será menor o igual que el ínfimo de la izquierda:

$$p(x) \leqslant \frac{\|x\|}{r}$$

Tomamos $M = \frac{1}{r}$.

3. Queremos ver que $C = \{x \in E : p(x) < 1\}$:

   $\supset$) Sea $x \in E$ con $p(x) < 1$, el ínfimo nos garantiza la existencia de $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$ de forma que $\alpha_0 < 1$ y $\frac{x}{\alpha_0} \in C$. Como $C$ es convexo y $0 \in C$, tenemos entonces que:

   $$x = \alpha_0 \frac{x}{\alpha_0} + (1 - \alpha_0) \cdot 0 \in C$$

   $\subset$) Sea $x \in C$, por ser $C$ abierto $\exists r > 0$ de forma que $B(x, r) \subset C$. Ahora, si tomamos $\varepsilon > 0$ de forma que:

   $$\frac{\|x\|}{r} < \frac{1}{\varepsilon}$$

   tendremos entonces que:

   $$\|(1 + \varepsilon)x - x\| = \|\varepsilon x\| = \varepsilon\|x\| < r \Longrightarrow (1 + \varepsilon)x \in B(x, r)$$

   En dicho caso, tendremos que:

   $$p(x) \leqslant \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1$$

4. Dados $x, y \in E$, sabemos que el conjunto:

   $$\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\}$$

   es un intervalo no acotado superiormente y acotado inferiormente por $p(x)$, pero no sabemos si el intervalo contiene a $p(x)$ (en cuyo caso se trataría de un mínimo) o si no. Sin embargo, lo que sí sabemos es que:

   $$\frac{x}{p(x) + \varepsilon}, \frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C \qquad \forall \varepsilon > 0$$

   Si usamos el apartado 3, tenemos que:

   $$p\left(\frac{x}{p(x) + \varepsilon}\right) < 1$$

   Como $C$ es convexo, si tomamos:

   $$t = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} \leqslant 1$$

   tenemos entonces que:

   $$\frac{x + y}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon} = t\frac{x}{p(x) + \varepsilon} + (1 - t)\frac{y}{p(y) + \varepsilon} \in C \qquad \forall x, y \in E$$

   Usando de nuevo la propiedad 3:

   $$p(x + y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon \qquad \forall x, y \in E, \quad \forall \varepsilon > 0$$

   De donde deducimos la propiedad buscada. □

*Observación.* Notemos que si $C = B(0,1)$, tenemos entonces que:

$$p(x) = \inf\left\{\alpha > 0 : \frac{x}{\alpha} \in C\right\} = \|x\| \qquad \forall x \in E$$

**Ejercicio 1.4.2.** Sea $E$ un espacio vectorial y $C$ un conjunto abierto, convexo y que contiene al 0, parece qer que $p$ tiene propiedades deseables para ser una norma en $E$ de forma que:

$$B_p(0,1) = C$$

es decir, el funcional de Minkoski de alguna forma resuelve el problema de dado un conjunto que quiero que sea la bola unidad, ¿qué norma considero?.

Se pide razonar las propiedades que ha de cumplir un conjunto $C \subset E$ abierto, convexo y que contiene al 0 para garantizar que el funcional de Minkowski de $C$ sea una norma.

**Teorema 1.22** (Hahn Banach, segunda versión geométrica)**.** *Sea $E$ un espacio normado, $\emptyset \neq A, B \subset E$ con $A \cap B = \emptyset$ ambos convexos, $A$ cerrado y $B$ compacto, entonces existe un hiperplano que separa estrictamente $A$ y $B$. Es decir, existen $f : E \to \mathbb{R}$ lineal y continua, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ de forma que:*

$$f(a) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha < \alpha + \varepsilon \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

*Demostración.* Sea $C = A - B$, tenemos que:

- $0 \notin C$, ya que $A \cap B = \emptyset$.
- $C$ es convexo, ya que $A$ y $B$ son convexos (se hizo en la prueba del Teorema anterior).
- $C$ es cerrado, ya que $A$ es cerrado y $B$ es compacto: sea $\{x_n\} \to x \in E$ con $x_n \in C \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces existen $\{a_n\}$ sucesión de puntos de $A$ y $\{b_n\}$ sucesión de puntos de $B$ con:

  $$x_n = a_n - b_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Como $B$ es compacto, existe una parcial $\{b_{\sigma(n)}\}$ convergente a $b \in B$. Si vemos que:

  $$x_{\sigma(n)} = a_{\sigma(n)} - b_{\sigma(n)} \Longrightarrow a_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n)} + b_{\sigma(n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

  Tenemos entonces que $\{a_{\sigma(n)}\} \to x+b$ y como $A$ es cerrado, ha de ser $x+b \in A$. En definitiva:

  $$x = x + b - b$$

  Con $x + b \in A$ y $b \in B$, por lo que $x \in C$, lo que demuestra que $C$ es cerrado.

Como $C$ es cerrado y $0 \notin C$, tenemos entonces que $E \setminus C$ es abierto y $0 \in E \setminus C$, de donde $\exists r > 0$ con que $B(0,r) \cap C = \emptyset$. Si usamos la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach para los conjuntos $B(0,r)$ y $C$, obtenemos un hiperplano cerrado $H = [f = \alpha]$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(y) \qquad \forall x \in C, \quad \forall y \in B(0,r)$$

es decir:

$$f(a-b) \leqslant \alpha \leqslant f(-rz) = -rf(z) \leqslant -r\|f\| \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B, \quad \forall z \in B(0,1)$$

Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}r\|f\|$, tenemos entonces que:

$$f(a) + \varepsilon \leqslant f(b) - \varepsilon \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Tomando $\beta = \text{mín}\{f(b) : b \in B\} + \varepsilon$, tenemos entonces que:

$$f(a) \leqslant \beta - \varepsilon < \beta + \varepsilon \leqslant f(b) \qquad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Es decir, el hiperplano cerrado $H = [f = \beta]$ separa estrictamente $A$ y $B$. □

Parece ser a priorio un Teorema más potente que la primera versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, pero en dimensión infinita apenas hay conjuntos compactos.

**Corolario 1.22.1.** *Sea $E$ un espacio vectorial, $F \subset E$ un subespacio vectorial de forma que $\overline{F} \neq E$, entonces existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ de forma que:*

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in F$$

*Demostración.* Como $\overline{F} \neq E$, tomamos $x_0 \in E \setminus \overline{F}$ y tenemos que $\{x_0\}$ es compacto, así como que $\{x_0\} \cap \overline{F} = \emptyset$, con $\overline{F}$ cerrado. Además, como $F$ es un subespacio vectorial, tenemos que $\overline{F}$ es un subespacio vectorial, luego convexo. Si aplicamos la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach, obtenemos $H = [f = \alpha]$ hiperplano cerrado que separa estrictamente $\overline{F}$ y $\{x_0\}$. Es decir, $\exists \varepsilon > 0$ de forma que:

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leqslant f(x_0) \qquad \forall x \in \overline{F}$$

Tenemos que $f \in E^*$ así como que $f \neq 0$ (ya que tenemos una separación estricta de $f(x_0)$). Finalmente:

$$f(x) < \alpha < f(x_0) \qquad \forall x \in \overline{F}$$

Fijaremos $\lambda \in \mathbb{R}^*$, tenemos que:

$$\lambda f(x) = f(\lambda x) < \alpha \qquad \forall x \in \overline{F}$$

- Si $\lambda > 0$, tenemos entonces que:

  $$f(x) < \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0$$

  luego $f(x) \leqslant 0 \quad \forall x \in F$.

- Si $\lambda < 0$, tenemos que:

  $$f(x) > \frac{\alpha}{\lambda} \qquad \forall \lambda < 0$$

  de la misma forma, $f(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in F$.

□

*Observación.* Notemos que el enunciado de este teorema es equivalente a:

Sea $E$ un espacio vectorial, $G \subset E$ un subespacio vectorial cerrado de $E$ con $G \neq E$, entonces existe $f \in E^*$, $f \neq 0$ de forma que:

$$f(x) = 0 \qquad \forall x \in F$$

Aunque esta forma de enunciarlo parezca más sencilla, preferimos enunciarlo de la primera forma, ya que lo que nos va a interesar del enunciado es su contrarrecíproco:

Sea $E$ un espacio vectorial y $F \subset E$ un subespacio vectorial, si $\forall f \in E^*$, $f \neq 0$, $\exists x \in F$ con $f(x) \neq 0$, entonces $F$ es denso en $E$.

Enunciado de otra forma más sencilla:

Si $f \in E^* \setminus \{0\}$, si la condición $f\big|_F = 0$ implica $f = 0$, entonces $F$ es denso en $E$.

Acabamos de encontrar una condición suficiente que nos permite probar que ciertos subespacios vectoriales de un espacio vectorial son densos, mediante una idea muy ingeniosa.

## 1.5. Espacio bidual

Sea $E$ un espacio normado, habíamos ya definido el espacio $E^*$, que probamos que era también un espacio normado, con la norma:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\langle f, x\rangle|$$

esto nos permite considerar $(E^*)^*$, al que llamaremos espacio bidual de $E$, y notaremos por $E^{**}$. Será costumbre denotar a sus elementos por letras griegas, y la norma en este espacio vendrá dada por:

$$\|\chi\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |\langle \chi, f\rangle|$$

**Proposición 1.23.** *Sea $E$ un espacio normado, $E^{**}$ contiene una copia isométrica de $E$.*

*Demostración.* Es decir, queremos probar que existe un subconjunto de $E^{**}$ que es isométrico con $E$, o en otras palabras, que existe una aplicación $J : E \to E^{**}$ que sea lineal, inyectiva y que preserve la norma. Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} J: & E & \longrightarrow & E^{**} \\ & x & \longmapsto & \chi_x \end{array}$$

donde $\chi_x$ es la aplicación dada por:

$$\begin{array}{rccc} \chi_x: & E^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \langle f, x\rangle \end{array}$$

Comprobemos primero que $J$ está bien definida, es decir, que $\chi_x \in E^{**}$. Para ello:

- $\chi_x$ es lineal, puesto que:

$$\chi_x(\lambda f+g) = \langle \lambda f+g, x\rangle = \lambda\langle f, x\rangle+\langle g, x\rangle = \lambda\chi_x(f)+\chi_x(g) \qquad \forall f, g \in E^*, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

- $\chi_x$ es continua, ya que:

$$\|\chi_x\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\chi_x(f)| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} |\langle f, x\rangle| \overset{(*)}{=} \|x\|$$

donde en $(*)$ hemos usado el Corolario 1.18.3 del Teorema de Hahn-Banach. Además, hemos probado que $\|\chi_x\| = \|x\|$, por lo que $J$ preserva la norma.

Nos falta comprobar que $J$ es lineal e inyectiva:

- Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in E$:

$$J(\lambda x + y) = \chi_{(\lambda x+y)} \overset{(*)}{=} \lambda\chi_x + \chi_y = \lambda J(x) + J(y)$$

donde en $(*)$ hemos usado que:

$$\chi_{(\lambda x+y)}(f) = \langle f, \lambda x + y\rangle = \lambda\langle f, x\rangle + \langle f, y\rangle = \lambda\chi_x(f) + \chi_y(f) \qquad \forall f \in E^*$$

- Sean $x, y \in E$ de forma que $J(x) = J(y)$, tenemos entonces que:

**Opción 1.**

$$J(x - y) = 0 \Longrightarrow 0 = \|J(x - y)\| \overset{(*)}{=} \|x - y\| \Longrightarrow x - y = 0$$

donde en $(*)$ usamos que $J$ conserva la norma.

**Opción 2.** Supuesto que $x \neq y$, si tomamos $v = x-y$ y consideramos $G = \mathbb{R}v$ podemos definir el funcional lineal y continuo:

$$g(tv) = t\|v\|$$

El Corolario 1.18.1 nos da la existencia de $f \in E^*$ de forma que $f(v) = \|v\|$, pero tenemos que:

$$f(v) = f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$$

por lo que $v = 0$, lo que es una contradicción.

Hemos probado que $E$ es isométrico con $J(E) \subset E^{**}$. □

**Definición 1.13.** Sea $E$ un espacio normado, decimos que es reflexivo si la aplicación $J$ de la proposición anterior es sobreyectiva.

## 1.6. Dual de $l_p$, para $1 \leqslant p < \infty$

Consideramos nuevamente el espacio:

$$l_p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}, \qquad \|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

y estaremos interesados en calcular su espacio dual, $l_p^*$. Para ello, si para cada $k \in \mathbb{N}$ denotamos por $e_k$ al vector que verifica:

$$e_k(n) = \delta_{n,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

claramente tenemos que $e_k \in l_p$, $\forall k \in \mathbb{N}, \forall p \in [1, \infty[$. Consideraremos el espacio:

$$\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \mathcal{L}(\{e_i : i \in \mathbb{N}\}) \subset l_p$$

Y dado $p \in [1, \infty[$, consideraremos siempre que $p^*$ cumple que:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1, \qquad p^* = \infty \text{ si } p = 1$$

Trataremos de probar que $\boxed{(l_p)^* \cong l_{p^*}}$

**Proposición 1.24.** *Si $p \in [1, \infty[$, se verifica que:*

$$\overline{\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}} = l_p$$

*Demostración.* Sea $x \in l_p$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

es decir, $s_n$ será el vector cuyas $n-$ésimas primeras componentes coinciden con las de $x$ y el resto de componentes son 0:

$$\begin{aligned} s_1 &= (x(1), 0, \ldots) \\ s_2 &= (x(1), x(2), 0, \ldots) \\ s_3 &= (x(1), x(2), x(3), 0, \ldots) \end{aligned}$$

Es evidente que $s_n \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, así como que $s_n(k) = x(k)$ siempre que $k \leqslant n$. De esta última observación deducimos que:

$$(\|x - s_n\|_p)^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} (|x(k)|)^p \to 0$$

por lo que $\{s_n\} \to x$ en $l_p$. □

**Proposición 1.25.** *Si $1 \leqslant p < \infty$, el espacio $(l_p)^*$ contiene una copia isométrica de $l_{p^*}$.*

*Demostración.* Tomaremos $y \in l_{p^*}$ y definiremos $\Phi_y : l_p \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\Phi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) \qquad \forall x \in l_p$$

que está bien definida (la serie es convergente), puesto que:

$$x \in l_p, y \in l_{p^*} \Longrightarrow xy \in l_1 \qquad \text{y} \qquad \|xy\|_1 \leqslant \|x\|_p \|y\|_{p^*}$$

Veamos que $\Phi_y$ es lineal, continua y que $\|\Phi_y\| = \|y\|_{p^*}$, puesto que:

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, z \in l_p$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\Phi_y(\lambda x + z) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x(n) + z(n))y(n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n) + \sum_{n=1}^{\infty} z(n)y(n) \\ &= \lambda \Phi_y(x) + \Phi_y(z)\end{aligned}$$

- Para ver que $\Phi_y$ es continua, veamos que:

$$|\Phi_y(x)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n)\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)||y(n)| \overset{(*)}{\leqslant} \|y\|_{p^*}\|x\|_p$$

  donde en $(*)$ usamos la desigualdad de Hölder, con lo que $\Phi_y$ es continua. Además hemos visto ya que, $\|\Phi_y\| \leqslant \|y\|_{p^*}$.

- Para la otra desigualdad, distinguimos casos:

  - Para $p = 1$, tenemos que:

  $$|y(n)| = |\Phi_y(e_n)| \leqslant \|\Phi_y\|\|e_n\|_p = \|\Phi_y\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

    de donde:

  $$\|y\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |y(n)| \leqslant \|\Phi_y\|$$

  - Para $1 < p < \infty$, tomamos:

  $$x(n) = (|y_n|)^{p^*-2} y_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

    y razonando como en el Ejercicio **??** obtenemos la desigualdad:

  $$\|y\|_{p^*} \leqslant \|\Phi_y\|$$

A partir de eso, veamos que:

$$\begin{array}{rccc}\Phi : & l_{p^*} & \longrightarrow & {l_p}^* \\ & y & \longmapsto & \Phi_y\end{array}$$

es lineal, inyectiva y que conserva la norma:

- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $x, y \in l_{p^*}$, tenemos que:

$$\Phi(\lambda x + y) = \Phi_{(\lambda x+y)} \overset{(*)}{=} \lambda\Phi_x + \Phi_y = \lambda\Phi(x) + \Phi(y)$$

donde en $(*)$ hemos usado que:

$$\begin{aligned}\Phi_{(\lambda x+y)}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z(n)(\lambda x(n) + y(n)) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} z(N)x(n) + \sum_{n=1}^{\infty} z(n)y(n) \\ &= \lambda\Phi_x(z) + \Phi_y(z)\end{aligned}$$

- Hemos visto ya que $\|\Phi_y\| = \|y\|_{p^*}$ para todo $y \in l_{p^*}$.
- Como $\Phi$ preserva la norma y es lineal, tenemos que si $x, y \in l_{p^*}$ con $\Phi(x) = \Phi(y)$, entonces:

$$0 = \Phi(x-y) \Longrightarrow 0 = \|\Phi(x-y)\| = \|x-y\| \Longrightarrow x = y$$

por lo que $\Phi$ es inyectiva.

□

**Proposición 1.26.** *Si $1 \leqslant p < \infty$, entonces $l_p{}^*$ es isométrico a $l_{p^*}$.*

*Demostración.* La demostración se basa en probar que la aplicación $\Phi$ de la Proposición anterior es sobreyectiva. Para ello, fijado $f \in l_p^*$, definimos:

$$y(n) = f(e_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Si $p = 1$, escribimos:

$$|y(k)| = \alpha_k y(k), \qquad \alpha_k = \left\{\begin{array}{rl} 1 & \text{si } y(k) \geqslant 0 \\ -1 & \text{si } y(k) < 0 \end{array}\right. \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$|y(n)| = |f(e_n)| \leqslant \|f\|\|e_n\| = \|f\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo que la sucesión $y$ está acotada, es decir, $y \in l_\infty$, y tenemos que $\Phi(y) = f$.

- Si $p > 1$, fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} (|y(k)|)^{p^*} &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k y(k))^{p^*-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (|y(k)|)^{p^*-1} f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (|y(k)|)^{p^*-1} e_k\right) \\ &\leqslant \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (|y(k)|)^{p^*-1} e_k\right\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} (|y(k)|)^{(p^*-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} (|y(k)|)^{p^*}\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Es decir:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|\right)^{p^*} \leqslant \|f\| \left(\left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|\right)^{p^*}\right)^{\frac{1}{p}}$$

de donde:

$$\|f\| \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

por lo que $y \in l_{p^*}$. Tenemos que:

$$\Phi_y(e_n) = y(n) = f(e_n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde $f(x) = \Phi_y(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Como es un conjunto denso, han de coincidir por continuidad en todo el espacio, con lo que:

$$f(x) = \Phi_y(x) \qquad \forall x \in l_p$$

de donde $\Phi_y = f$

$\square$

A partir de los resultados vistos en esta sección, se propone:

**Ejercicio 1.6.1.** Calcular el dual de $c_0$, y comprobar que es isométrico con $l_1$.

**Ejercicio 1.6.2.** Calcular el dual de $c$ y comprobar que es isométrico con $l_1$.

**Ejercicio 1.6.3.** Demostrar que $c_0$ no es reflexivo.

**Ejercicio 1.6.4.** Demostrar que $l_p$ es reflexivo para $1 < p < \infty$.

# 2. Principio de acotación uniforme y Tª de la gráfica cerrada

**Definición 2.1.** Sean $E, F$ espacios normados, definimos:

$$L(E,F) = \{f : E \to F : f \text{ lineal y continua}\}$$

y notaremos normalmente $L(E) := L(E,E)$.

**Proposición 2.1.** *Al igual que como sucedía con aplicaciones lineales y continuas de un espacio normado $E$ en $\mathbb{R}$, si $E, F$ son espacios normados y $T \in L(E,F)$ tenemos*[1]*:*

1. *$T$ es continua $\Longleftrightarrow$ $T$ es continua en $0$ $\Longleftrightarrow \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| < \infty$*

2. *Si definimos:*

$$\|T\| := \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \qquad \forall T \in L(E,F)$$

   *Tenemos que $\|\cdot\|$ es una norma en $L(E,F)$.*

3. *Se verifica que:*

$$\|T\| = \inf\{M > 0 : \|Tx\| \leqslant M\|x\|, \quad \forall x \in E\}$$

## 2.1. Principio de acotación uniforme

Con vistas a demostrar el Principio de acotación uniforme, demostramos el siguiente Lema:

**Lema 2.2.** *Sean $E, F$ espacios normados y $T \in L(E,F)$, entonces:*

$$\sup_{\|x-x_0\|\leqslant r} \|Tx\| \geqslant r\|T\| \qquad \forall x_0 \in E, \quad \forall r > 0$$

*Demostración.* Fijado $r \in \mathbb{R}^+$, sean $x_0, y \in E$ con $\|y\| \leqslant r$:

$$\begin{aligned}
\|Ty\| &= \left\| T\left(\frac{1}{2}\left[x_0 + y - (x_0 - y)\right]\right)\right\| = \frac{1}{2}\|T(x_0 + y - (x_0 - y))\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\|T(x_0 + y)\| + \|T(x_0 - y)\|\right) \leqslant \max\{\|T(x_0 + y)\|, \|T(x_0 - y\|)\} \\
&\leqslant \sup_{\|y\|\leqslant r} \max\{\|T(x_0 + y)\|, \|T(x_0 - y)\|\} \leqslant \sup_{\|z-x_0\|\leqslant r} \|Tz\|
\end{aligned}$$

[1] Resultados análogos que se realizan con las mismas pruebas.

Si ahora observamos que:

$$\sup_{\|y\|\leqslant r} \|Ty\| = r \sup_{\|z\|\leqslant 1} \|Tz\| = r\|T\|$$

Acabamos de probar que $\sup\limits_{\|x-x_0\|\leqslant r} \|Tx\| \geqslant r\|T\|$. □

**Teorema 2.3** (Principio de acotación uniforme, de Banach-Steinhaus)**.** *Sea $E$ un espacio de Banach, $F$ un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(E,F)$, entonces:*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < +\infty \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < +\infty$$

*Demostración.* Demostraremos el contrarrecíproco:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| = \infty$$

Supongamos pues que $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|T\| = \infty$, por lo que existe una sucesión de elementos de $\mathcal{F}$, llamémosla $\{T_n\}$, de forma que:

$$\|T_n\| \geqslant 4^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Definimos por inducción una sucesión de puntos de $E$:

- $x_0 = 0 \in E$.
- Tomando $r = 1/3$, el Lema 2.2 nos dice:

  $$\sup_{\|x-x_0\|<\frac{1}{3}} \|T_1x\| \geqslant \frac{1}{3}\|T_1\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\|T_1\|$$

  Como $2/3 \cdot 1/3 \cdot \|T_1\|$ es estrictamente menor que el supremo de la izquierda, tenemos que no puede ser una cota superior de $\|T_1x\|$ para $x \in B(x_0, 1/3)$, con lo que $\exists x_1 \in B(x_0, 1/3)$ de forma que:

  $$\|T_1x_1\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\|T_1\|$$

- Supuesto que hemos construido hasta $x_{n-1}$, veamos cómo construir $x_n$:

  Tomando $r = 1/3^n$, el Lema 2.2 nos dice que:

  $$\sup_{\|x-x_{n-1}\|<\frac{1}{3^n}} \|T_nx\| \geqslant \frac{1}{3^n}\|T_n\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\|$$

  Y por el mismo razonamiento de antes podemos encontrar $x_n \in B(x_{n-1}, 1/3^n)$ de forma que:

  $$\|T_nx_n\| > \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\|$$

Veamos ahora que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Para ello, buscamos acotar $\|x_m - x_n\|$ para $n, m$ índices bastante avanzados. Supondremos sin pérdida de generalidad que $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$, donde tendremos:

$$\begin{aligned}
\|x_m - x_n\| &= \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n\| \\
&\leqslant \|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - x_{m-2}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leqslant \frac{1}{3^m} + \frac{1}{3^{m-1}} + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3^n}\left[\frac{1}{3^{m-n}} + \ldots + \frac{1}{3}\right] \\
&\leqslant \frac{1}{3^n}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^n}\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

En definitiva, tenemos que:

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \ldots + x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}$$

Por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy en $E$, que era de Banach, por lo que $\{x_n\}$ converge a cierto $x \in E$. Observemos que:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} \geqslant \lim_{m\to\infty}\|x_m - x_n\| \overset{(*)}{=} \left\|\lim_{m\to\infty}(x_m - x_n)\right\| = \|x - x_n\|$$

donde en $(*)$ hemos usado la continuidad de $\|\cdot\|$. Calculamos ahora:

$$\begin{aligned}
\|T_n x\| &= \|T_n(x - x_n + x_n)\| \geqslant \|T_n x_n\| - \|T_n(x - x_n)\| \geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \|T_n\|\|x - x_n\| \\
&\geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| - \|T_n\|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{3^n}\|T_n\| = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^n}\|T_n\| \geqslant \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}\right)^n \to \infty
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\| \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n x\| = \infty$$

Como queríamos probar. □

Introducimos ahora una serie de Corolarios que nos da el Principio de acotación uniforme:

**Corolario 2.3.1.** *Sean $E, F$ dos espacios de Banach, sea $\{T_n\}$ una sucesión de elementos de $L(E,F)$ de forma que $\{T_n(x)\} \to T(x)$ para todo $x \in E$. Entonces:*

*(a)* $\sup_{n\in\mathbb{N}}\|T_n\| < \infty$.

*(b)* $T \in L(E,F)$.

*(c)* $\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty}\|T_n\|$.

*Demostración.* Demostramos cada apartado:

(a) Dado $x \in E$, como $\{T_n(x)\} \to T(x)$, tenemos que $\exists m \in \mathbb{N}$ de forma que:

$$T_n(x) \in B(T(x), 1) \qquad \forall n \geqslant m$$

Por lo que $\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, puesto que podemos verlo como la unión de un conjunto acotado y uno finito:

$$\{T_n(x) : n \in \mathbb{N}\} = \{T_n(x) : n \geqslant m\} \cup \{T_n(x) : n < m\}$$

En definitiva, tenemos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$, de donde aplicando el Principio de acotación uniforme tenemos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$.

(b) Veamos que $T : E \to F$ es lineal y continua:

- Es fácil ver que $T$ es lineal:

$$\begin{aligned} T(\lambda x + y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\lambda x + y) = \lim_{n\to\infty} (\lambda T_n(x) + T_n(y)) \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = \lambda T(x) + T(y) \qquad \forall x, y \in E \end{aligned}$$

- Para ver que $T$ es continua podemos usar el apartado $(a)$:

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n\|\|x\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\|x\| \qquad \forall x \in E$$

  Y como $\{\|T_n(x)\|\} \to \|T(x)\|$, tenemos que:

$$\|T(x)\| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\|x\| \qquad \forall x \in E$$

  lo que nos dice que $T$ es continua.

(c) Para ver que $\|T\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T_n\|$, notemos que:

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &= \left\|\lim_{n\to\infty} T_n(x)\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(x)\| = \liminf \|T_n(x)\| \leqslant \liminf(\|T_n\|\|x\|) \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant k}(\|T_n\|\|x\|) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant k} \|T_n\| \cdot \|x\| = \liminf \|T_n\| \cdot \|x\| \qquad \forall x \in E \end{aligned}$$

De donde $\|T\| \leqslant \liminf \|T_n\|$.

□

**Corolario 2.3.2.** *Sea $G$ un espacio de Banach y $B \subset G$, si para toda $f \in G^*$ el conjunto $f(B)$ está acotado (en $\mathbb{R}$), entonces $B$ está acotado.*

*Demostración.* Comenzamos la demostración pensando a lo que queremos llegar, pues así nos será más fácil comenzar la demostración. Queremos probar que $B$ está acotado, es decir, que existe $M > 0$ de forma que:

$$\|b\| \leqslant M \qquad \forall b \in B$$

Si recordamos que el Corolario 1.18.3 nos dice que:

$$\|b\| = \sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(b)|$$

observemos que lo queremos es buscar una cota superior de $|f(b)|$, donde $b$ está fija y $f$ se mueve. Para ello, podemos pensar en definir ciertos funcionales $T_b(f)$ de forma que tras aplicar el Principio de Acotación Uniforme obtengamos para $\|f\| \leqslant 1$:

$$|f(b)| = |T_b(f)| \leqslant \|T_b\|\|f\| \leqslant \|T_b\| \leqslant \sup_{b \in B} \|T_b\| < \infty$$

Con lo que nuestra constante $M$ la tomaremos como $\sup\limits_{b \in B} \|T_b\|$. Comenzando ahora con la demostración, fijado $b \in B$, definimos la aplicación $T_b : G^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T_b(f) = f(b) \qquad \forall f \in G^*$$

Con lo que $T_b \in L(G^*, \mathbb{R})$:

- Es claro que $T_b$ es lineal.
- $T_b$ es continua, ya que $|T_b(f)| = |f(b)| \leqslant \|b\|\|f\| \quad \forall f \in G^*$.

Como $f(B)$ es acotado para toda $f \in G^*$, tenemos entonces que:

$$\sup_{b \in B} |T_b(f)| = \sup_{b \in B} |f(b)| < \infty \qquad \forall f \in G^*$$

Con lo que aplicando el Principio de acotación uniforme tenemos:

$$\sup_{b \in B} \|T_b\| < \infty$$

Ahora, si tomamos $f \in G^*$ con $\|f\| \leqslant 1$, buscamos usar que $\|x\| = \sup\limits_{\|f\| \leqslant 1} |f(x)|$:

$$|f(b)| = |T_b(f)| \leqslant \|T_b\|\|f\| \leqslant \sup_{b \in B} \|T_b\|\|f\| \leqslant \sup_{b \in B} \|T_b\|$$

Por lo que $\|b\| \leqslant \sup\limits_{b \in B} \|T_b\| < \infty \quad \forall b \in B$, lo que nos dice que $B$ está acotado. $\square$

Este último corolario nos dice que si $B \subset G^*$ es un conjunto cualquiera, una forma de estudiar si $B$ es un conjunto acotado, una posibilidad es tratar de calcular su imagen bajo cualquier función $f \in G^*$, que es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Recordemos que en $\mathbb{R}^n$ un conjunto era acotado si y solo si cada una de sus proyecciones es un conjunto acotado. Este Corolario hace ese papel en espacios de dimensión infinita, que junto con el siguiente son muy utilizados.

**Corolario 2.3.3.** *Sea $G$ un espacio de Banach y sea $B^* \subset G^*$, si el conjunto:*

$$B^*(x) = \{f(x) : f \in B^*\}$$

*está acotado para todo $x \in G$, entonces $B^*$ está acotado.*

*Demostración.* Al igual que antes empezamos por el final, pues así nos será más fácil comenzar la demostración. Queremos concluir que $B^*$ está acotado, es decir, que:

$$\|f\| \leqslant M \qquad \forall f \in B^*$$

para cierta constante $M > 0$. Para ello, si recordamos la definición de $\|f\|$, vemos que:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|$$

donde $f$ está fija y movemos la $x$, con lo que trataremos de definir funcionales $T_f(x)$ de forma que para $\|x\| \leqslant 1$:

$$|f(x)| = |T_f(x)| \leqslant \|T_f\|\|x\| \leqslant \|T_f\| \leqslant \sup_{f \in B^*} \|T_f\|$$

Comenzando ahora con la demostración, para cada $f \in B^*$ definimos la aplicación $T_f : G \to \mathbb{R}$ dada por:

$$T_f(x) = f(x) \qquad \forall x \in G$$

con lo que $T_f \in G^*$ para todo $f \in B^*$:

- Es fácil ver que $T_f$ es lineal para cualquier $f \in B^*$.

- No es difícil ver que $T_f$ es continua para $f \in B^*$, ya que:

$$|T_f(x)| = |f(x)| \leqslant \|f\|\|x\| \qquad \forall x \in G$$

Como el conjunto $B^*(x)$ está acotado para todo $x \in G$, tenemos que:

$$\sup_{f \in B^*} \|T_f(x)\| = \sup_{f \in B^*} |f(x)| < \infty$$

nos encontramos en las hipótesis del Principio de acotación uniforme, que nos dice que entonces:

$$\sup_{f \in B^*} \|T_f\| < \infty$$

en cuyo caso, si $\|x\| \leqslant 1$, entonces:

$$|f(x)| = |T_f(x)| \leqslant \|T_f\|\|x\| \leqslant \|T_f\| \leqslant \sup_{f \in B^*} \|T_f\| \qquad \forall f \in B^*$$

con lo que:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \leqslant \sup_{f \in B^*} \|T_f\| \qquad \forall f \in B^*$$

de donde deducimos que $B^*$ está acotado. □

## 2.2. Otra demostración del Principio de acotación uniforme

Repetiremos ahora la demostración del Principio de acotación uniforme de otra forma, usando el Lema de Baire, un resultado clásico que nos da de forma no muy complicada la demostración del Principio.

**Lema 2.4** (de Baire)**.** *Sea $X$ un espacio métrico completo, sea $\{X_n\}$ una sucesión de subconjuntos de $X$ todos ellos cerrados y con interior vacío, entonces:*

$$\operatorname{Int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) = \emptyset$$

*Demostración.* Tomaremos $O_n = X \setminus X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, con lo que $O_n$ es abierto y denso para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que:

$$\overline{O_n} = \overline{X \setminus X_n} = X \setminus \operatorname{Int} X_n = X \setminus \emptyset = X \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Y la prueba terminará probando que $G = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$ es denso, ya que en dicho caso tendremos:

$$X = \overline{G} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n} = \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X \setminus X_n} = \overline{X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n} = X \setminus \operatorname{Int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right)$$

de donde podremos deducir que $\operatorname{Int}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\right) X_n = \emptyset$. Para probar que $G$ es denso, sea $\omega$ un abierto no vacío de $X$, tenemos que probar que $\omega \cap G \neq \emptyset$. Como $\omega$ es abierto, dado $x_0 \in \omega$ podemos encontrar $r_0 > 0$ de forma que:

$$\overline{B(x_0, r_0)} \subset \omega$$

Tras esto, como $O_1$ es abierto y denso, podremos elegir $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ y $r_1 > 0$ de forma que:

$$\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x_0, r_0) \cap O_1 \quad \text{y} \quad 0 < r_1 < \frac{r_0}{2}$$

De forma inductiva, como cada $O_n$ es abierto y denso, seremos capaces de encontrar dos sucesiones: $\{x_n\}$ de puntos de $X$ y $\{r_n\}$ de reales positivos de forma que se cumpla:

$$\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1} \quad \text{y} \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Veamos que $\{x_n\}$ es de Cauchy. Para ello, sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geqslant n$, tendremos que:

$$x_m \in B(x_{m-1}, r_{m-1}) \subset \ldots \subset B(x_n, r_n)$$
$$r_n < \frac{r_{n-1}}{2} < \frac{r_{n-2}}{2^2} < \ldots < \frac{r_0}{2^n}$$

Por lo que:

$$\|x_m - x_n\| < r_n < \frac{r_0}{2^n}$$

de donde deducimos que $\{x_n\}$ es de Cauchy en $X$, y como $X$ era completo, existe $l \in X$ de forma que $\{x_n\} \to l$. Finalmente, como $x_{n+p} \in B(x_n, r_n)$ para $n, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tomando límite cuando $p \to \infty$ obtenemos que:

$$l \in \overline{B(x_n, r_n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

En particular, $l \in \omega \cap G$, por lo que $G$ es denso, lo que concluye la demostración. $\square$

Cabe destacar que una de las formas en las que más se utiliza el Lema de Baire es mediante su contrarrecíproco:

Sea $X$ un espacio métrico completo, sea $\{X_n\}$ una sucesión de subconjuntos de $X$ todos ellos cerrados, entonces:

$$\operatorname{Int}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n\right) \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \operatorname{Int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$$

Ahora, volveremos a demostrar el Principio de acotación uniforme usando el Lema de Baire.

**Teorema 2.5** (Principio de acotación uniforme)**.** *Sea $E$ un espacio de Banach, $F$ un espacio normado y $\mathcal{F}$ un subconjunto de $L(E, F)$, entonces:*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < +\infty \quad \forall x \in E \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < +\infty$$

*Demostración.* Suponiendo que indexamos nuestra familia mediante un conjunto $I$: $\mathcal{F} = \{T_i\}_{i\in I}$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \{x \in E : \|T_i x\| \leqslant n, \quad \forall i \in I\}$$

que verifica:

- $X_n$ es cerrado para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que si tomamos $\{x_m\}$ una sucesión de puntos de $X_n$ convergente a $x \in E$, tenemos entonces que $\|T_i x_m\| \leqslant n$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Usando que $\|\cdot\|$ y que $T_i$ son las dos funciones continuas obtenemos que:
$$\|T_i x\| \leqslant n$$
con lo que $x \in X_n$.
- Usando que $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}} \|Tx\| < \infty$, sabemos entonces que existe $M \in \mathbb{N}$ de forma que $\|Tx\| \leqslant M$ para todo $x \in E$ y $T \in \mathcal{F}$, con lo que $X_M = E$, luego:
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n = E$$

Como $E$ es abierto y es un espacio vectorial, tenemos que $\operatorname{Int} E = E \neq \emptyset$. Por el Lema de Baire tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $\operatorname{Int}(X_{n_0}) \neq \emptyset$, lo que nos permite tomar $x_0 \in E$ y $r > 0$ de forma que $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$, lo que nos dice por la definición de $X_{n_0}$ que:

$$\|T_i(x_0 + rz)\| \leqslant n_0 \qquad \forall i \in I, \quad \forall z \in B(0, 1)$$

como:

$$n_0 \geqslant \|T_i(x_0 + rz)\| \geqslant \|T_i(rz)\| - \|T_i(x_0)\| \quad \Longrightarrow \quad r\|T_i(z)\| \leqslant n_0 + \|T_i(x_0)\|$$
$$\forall i \in I, \quad \forall z \in B(0,1)$$

tendremos:

$$r\|T_i\| \leqslant n_0 + \|T_i(x_0)\| \leqslant n_0 + \sup_{T\in\mathcal{F}} \|T(x_0)\| < \infty \qquad \forall i \in I, \quad \forall z \in B(0,1)$$

de donde concluimos que $\sup_{T\in\mathcal{F}} \|T\| < \infty$ □

## 2.3. Teorema de la aplicación abierta

**Ejercicio 2.3.1.** Sean $X, Y$ dos espacios de Banach, $T \in L(X,Y)$, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $y \in Y$:

$$\|y\|_n := \inf\{\|u\| + n\|v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T(u) + v\}$$

Probar que $\|\cdot\|_n$ es una norma en $Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que verifica:

$$\|y\|_n \leqslant n\|y\| \qquad \forall y \in Y$$

Además, si $y = T(x)$ con $x \in X$, entonces:

$$\|y\|_n \leqslant \|x\|$$

Veamos en primer lugar que $\|\cdot\|_n$ es una norma en $Y$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, fijaremos $n \in \mathbb{N}$ y veremos las propiedades de una norma:

- Para la no degeneración, supongamos que $y \in Y$ con $\|y\|_n = 0$. Por definición del ínfimo, existen sucesiones $\{u_m\}$ de puntos de $X$ y $\{v_m\}$ de puntos de $Y$ de forma que:

  $$\{\|u_m\| + n\|v_m\|\} \to 0 \qquad y = T(u_m) + v_m \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

  como $\|u_m\|, \|v_m\| \geqslant 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que:

  $$\{\|u_m\|\}, \{\|v_m\|\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \{u_m\}, \{v_m\} \to 0$$

  usando ahora que $y = T(u_m) + v_m$ para todo $m \in \mathbb{N}$, observemos que:

  $$\{T(u_m) + v_m\} \to 0$$

  donde hemos usado que $T$ y la suma son continuas, con lo que $y = 0$.

- Para la homogeneidad por homotecias, sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $y \in Y$:

  $$\begin{aligned}
  |\lambda|\|y\|_n &= \inf\{|\lambda|(\|u\| + n\|v\|) : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T(u) + v\} \\
  &= \inf\{\|\lambda u\| + n\|\lambda v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T(u) + v\} \\
  &= \inf\left\{\|u\| + n\|v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } y = T\left(\frac{u}{\lambda}\right) + \frac{v}{\lambda}\right\} \\
  &= \inf\{\|u\| + n\|v\| : u \in X, v \in Y \text{ con } \lambda y = T(u) + v\} = \|\lambda y\|_n
  \end{aligned}$$

- Finalmente, para la desigualdad triangular, sean $y_1, y_2 \in Y$, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos por la caracterización del ínfimo que existen $u_1, u_2 \in X$, $v_1, v_2 \in Y$ de forma que:

$$y_i = T(u_i) + v_i \quad \text{y} \quad \|u_i\| + n\|v_i\| \leqslant \|y_i\| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall i \in \{1, 2\}$$

de donde $y_1 + y_2 = T(u_1) + v_1 + T(u_2) + v_2 = T(u_1 + u_2) + v_1 + v_2$, por lo que:

$$\begin{aligned}\|y_1 + y_2\| \leqslant \|u_1 + u_2\| + n\|v_1 + v_2\| &\leqslant \|u_1\| + n\|v_1\| + \|u_2\| + n\|v_2\| \\ &\leqslant \|y_1\| + \|y_2\| + \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0\end{aligned}$$

En definitiva, hemos probado que $\|y_1 + y_2\| \leqslant \|y_1\| + \|y_2\|$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea ahora $y \in Y$, tomando $u = 0 \in X$ y $v = y \in Y$, tenemos que:

$$y = 0 + y = T(u) + v$$

por lo que:

$$\|y\|_n \leqslant \|u\| + n\|v\| = n\|y\|$$

Si tenemos ahora que $y = T(x)$ para $x \in X$, podemos tomar $u = x \in X$ y $v = 0 \in Y$ con lo que:

$$y = y + 0 = T(x) + v$$

por lo que:

$$\|y\|_n \leqslant \|u\| + n\|v\| = \|x\|$$

**Ejercicio 2.3.2.** Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal entre dos espacios normados:

$$T \text{ es abierta} \iff \exists \delta > 0 : B(0, \delta) \subset T(B(0, 1))$$

**Teorema 2.6** (de la aplicación abierta)**.**
*Sean $X, Y$ espacios de Banach, sea $T \in L(X, Y)$ sobreyectiva, entonces $T$ es una aplicación abierta.*

*Demostración.* La demostración se completa en dos pasos:

**Paso 1.** Veamos que $\exists r > 0$ de forma que $B(0, r) \subset \overline{T(B(0, 1))}$:

Consideramos en $Y$ la norma:

$$\|y\|_n = \inf\{\|u\| + n\|v\| : y = T(u) + v, u \in X, v \in Y\} \qquad \forall y \in Y, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Que abreviaremos por:

$$\|y\|_n = \inf_{y = T(u) + v} \{\|u\| + n\|v\|\}$$

Cuyas propiedades fueron vistas en el Ejercicio 2.3.1. Consideramos ahora $Z$ como el espacio de todas aquellas sucesiones casi nulas[2] $\{z_n\}$ de puntos de $Y$. Consideraremos en dicho espacio:

$$\|\{z_n\}\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} \|z_n\|_n \qquad \forall \{z_n\} \in Z$$

[2]Es decir, con un número finito de términos no nulos.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} T_n: & Y & \longrightarrow & Z \\ & y & \longmapsto & T_n(y) \end{array}$$

dada por:

$$T_n(y) = \{\delta_{n,k} \cdot y\}_{k\in\mathbb{N}}$$

donde usamos la $\delta$ de Dirichlet:

$$\delta_{n,k} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{array} \right.$$

Veamos que $T_n \in L(Y, Z)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Para ello, dado $n \in \mathbb{N}$; vemos que:

- Es lineal, ya que si $y_1, y_2 \in Y$:

$$\begin{aligned} T_n(y_1 + y_2) &= \{\delta_{n,k} \cdot (y_1 + y_2)\}_{k\in\mathbb{N}} = \{\delta_{n,k} \cdot y_1 + \delta_{n,k} \cdot y_2\}_{k\in\mathbb{N}} \\ &= \{\delta_{n,k} \cdot y_1\}_{k\in\mathbb{N}} + \{\delta_{n,k} \cdot y_2\}_{k\in\mathbb{N}} = T_n(y_1) + T_n(y_2) \end{aligned}$$

- Para ver que $T_n : (Y, \|\cdot\|) \to (Z, \|\cdot\|_\infty)$ es continua:

$$\begin{aligned} \|T_n(y)\|_\infty &= \|\{\delta_{n,k} \cdot y\}_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} \|\delta_{n,k} \cdot y\|_n \\ &= \max_{k\in\mathbb{N}} (\delta_{n,k} \cdot \|y\|_n) = \|y\|_n \overset{(*)}{\leqslant} n\|y\| \qquad \forall y \in Y \end{aligned}$$

  donde en $(*)$ hemos usado el Ejercicio 2.3.1.

Veamos ahora que para cada $y \in Y$, la sucesión $\{T_n(y)\}$ está acotada. Para ello, sea $y \in Y$, como $T$ es sobreyectiva $\exists x \in X$ de forma que $T(x) = y$, con lo que:

$$\|T_n(y)\|_\infty = \|y\|_n \overset{(*)}{\leqslant} \|x\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

donde en $(*)$ hemos vuelto a usar el Ejercicio 2.3.1. Aplicando el Principio de acotación uniforme, tenemos que $\{\|T_n\|\}$ está acotada, es decir, existe $M > 0$ de forma que:

$$\|T_n\| \leqslant M \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

con lo que:

$$\|y\|_n = \|T_n(y)\|_\infty \leqslant M\|y\| \qquad \forall y \in Y$$

Sea $y \in B\left(0, {}^1\!/\!_M\right)$, queremos deducir que $y \in \overline{T(B(0,1))}$ :

$$\|y\|_n = \inf_{y=T(u)+v} \{\|u\| + n\|v\|\} \leqslant M\|y\| < \frac{M}{M} = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como el ínfimo de dicho conjunto es menor que 1, han de existir sucesiones $\{u_m\}$ en $X$ y $\{v_m\}$ en $Y$ de forma que:

$$y = T(u_m) + nv_m \qquad \|u_m\| + n\|v_m\| < 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que:

$$\|u_m\|,\ n\|v_m\| < 1 \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

luego $\|v_m\| < 1/n$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Ahora:

$$T(u_n) = T(u_n) + v_n - v_n = y - v_n \overset{(*)}{\to} y$$

donde en $(*)$ usamos que $\|v_m\| < 1/n$. Observamos ahora que $u_n \in B(0,1)$ y que $v_n \to 0$, por lo que ha de ser $y \in \overline{T(B(0,1))}$. Tomando $r = 1/M$ tenemos el paso 1.

**Paso 2.** Veamos ahora que $B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset T(B(0,1))$.

Sabemos del paso 1 que $\exists r > 0$ de forma que $B(0,r) \subset \overline{T(B(0,1))}$, con lo que:

$$B\left(0, \frac{r}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} B(0,r) \subset \frac{1}{2^n}\overline{T(B(0,1))} = \overline{T\left(B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)\right)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

- Para $n = 1$ tenemos:

  $$B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset \overline{T\left(B\left(0, \frac{1}{2}\right)\right)}$$

  por lo que si $y \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$, tenemos entonces que existe $x_1 \in B\left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que[3] $\|y - T(x_1)\| < \frac{r}{2^2}$, de donde $y - T(x_1) \in B\left(0, \frac{r}{2^2}\right)$
- Para $n = 2$:

  $$B\left(0, \frac{r}{2^2}\right) \subset \overline{T\left(B\left(0, \frac{1}{2^2}\right)\right)}$$

  Como $y - T(x_1) \in B\left(0, \frac{r}{2^2}\right)$, podemos encontrar $x_2 \in B\left(0, \frac{1}{2^2}\right)$ tal que $\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{r}{2^3}$, de donde $y - T(x_1) - T(x_2) \in B\left(0, \frac{r}{2^3}\right)$.
- En definitiva, hemos obtenido $x_n \in B\left(0, \frac{1}{2^n}\right)$ tal que:

  $$\left\| y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right\| < \frac{r}{2^{n+1}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

Con lo que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$$

Por lo que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente en norma, y como $X$ es de Banach, tenemos que $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es converegente, a cierto $x \in X$. Ahora:

$$\|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

De la ecuación (2.1) obtenemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T(x_k) = y$$

[3]Esta distancia podemos acotarla tanto como queramos.

Finalmente:

$$\begin{aligned} T(x) &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_k\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} T(x_k) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_k) = y \end{aligned}$$

donde en $(*)$ usamos que $T$ es continua. En defintiva, hemos probado que $y \in T(B(0,1))$, ya que $\|x\| < 1$.

□

**Corolario 2.6.1.** *Sean $E$ y $F$ dos espacios de Banach y sea $T \in L(E,F)$ biyectiva, entonces $T^{-1}$ es también continua.*

*Demostración.* Por el Teorema de la aplicación abierta tenemos que $T$ es abierta

**Opción 1.** Deducimos que $T$ es un homeomorfismo, luego $T^{-1}$ es continua.

**Opción 2.** Sea $U \subset E$ abierto, observamos que:

$$(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$$

y como $T$ es abierta concluimos que $T(U)$ es abierto, con lo que $T^{-1}$ es continua.

□

**Corolario 2.6.2.** *Sea $E$ un espacio vectorial con normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Supongamos que $E$ es de Banach para ambas normas y que existe una constante $C \geqslant 0$ de forma que:*

$$\|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

*Entonces, las dos normas son equivalentes, es decir, existe una constante $c > 0$ de forma que:*

$$\|x\|_1 \leqslant c\|x\|_2 \qquad \forall x \in E$$

*Demostración.* Sea $T : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$ dada por $T(x) = x$, tenemos claramente que $T$ es lineal, así como que:

$$\|T(x)\|_2 = \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

por lo que $T$ es continua. Es claro que también $T \in L(E,E)$ es biyectiva, con lo que por el Ejercicio anterior tenemos que $T^{-1}$ es también continua. Es obvio que $T^{-1} : (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$ viene dada por $T^{-1}(x) = x$. Es claro que se verifica la igualdad:

$$\|x\|_1 = \|T^{-1}(x)\|_1 \leqslant \|T^{-1}\|\|x\|_2 \qquad \forall x \in E$$

Por lo que tomando $c = \|T^{-1}\|$ se tiene el resultado. □

Por tanto, si tenemos dos normas completas, es suficiente comprobar una desigualdad para obtener la otra que nos demuestra que las dos normas son equivalentes.

## 2.4. Teorema de la gráfica cerrada

Sea $T : E \to F$ una aplicación continua con $E, F$ espacios normados, sabemos entonces que $Gr(T)$ es cerrado en $E \times F$.

*Demostración.* Sea $\{(x_n, T(x_n))\}$ una sucesión de elementos de $Gr(T)$ convergente a un elemento $(x, y)$ de $E \times F$, tenemos entonces que $\{x_n\} \to x$ y como $T$ es continua, deducimos que:

$$y \leftarrow \{T(x_n)\} \to T(x)$$

Por lo que $y = T(x)$, de donde $(x, y) \in Gr(T)$, luego $Gr(T)$ es cerrado. □

**Teorema 2.7** (de la Gráfica Cerrada)**.** *Sean $E, F$ dos espacios de Banach y sea $T : E \to F$ una aplicación lineal. Si $Gr(T)$ es cerrado, entonces $T$ es continua.*

*Demostración.* Definimos una nueva norma en $E$, que depende del funcional $T$:

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \qquad \forall x \in E$$

Que es una norma:

- Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, usando que $T$ es lineal:

$$\|\lambda x\|_T = \|\lambda x\|_E + \|T(\lambda x)\|_F = |\lambda|(\|x\|_E + \|T(x)\|_F) = |\lambda|\|x\|_T$$

- Tenemos que:

$$\|x\|_T = 0 \Longleftrightarrow \|x\|_E + \|Tx\|_F \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|x\|_E = 0 \\ \|Tx\|_F = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = 0$$

- Si $x_1, x_2 \in E$:

$$\begin{aligned} \|x_1 + x_2\|_T = \|x_1 + x_2\|_E + \|T(x_1 + x_2)\|_F &\leqslant \|x_1\|_E + \|x_2\|_E + \|Tx_1\|_F + \|Tx_2\|_F \\ &= \|x_1\|_T + \|x_2\|_T \end{aligned}$$

Además, $(E, \|\cdot\|_T)$ es completo. Para ello, si $\{x_n\}$ es una sucesión de puntos de $E$ de Cauchy para $\|\cdot\|_T$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geqslant n_0 \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_T < \varepsilon$$

Como:

$$\|x_n - x_m\|_T = \|x_n - x_m\|_E + \|T(x_n - x_m)\|_F \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \|x_n - x_m\|_E \\ \|T(x_n - x_m)\|_F \end{array} \right.$$

Por lo que $\{x_n\}$ es de Cauchy para $\|\cdot\|_E$ en $E$ y $\{T(x_n)\}$ es de Cauchy en $F$. Como ambos son espacios de Banach, existe $x \in E$ y $y \in F$ de forma que:

$$\|x_n - x\|_E \to 0 \qquad \|T(x_n) - y\|_F \to 0$$

Como $(x_n, Tx_n) \in Gr(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos entonces que $\{(x_n, Tx_n)\}$ es una sucesión de puntos de $Gr(T)$ convergente a $(x, y)$. Como por hipótesis $Gr(T)$

es cerrado, tenemos entonces que $(x, y) \in Gr(T)$, por lo que $y = T(x)$.

Tenemos por tanto que $\|x_n - x\|_E, \|Tx_n - Tx\|_F \to 0$, de donde:

$$\|x_n - x\|_T = \|x_n - x\|_E + \|Tx_n - Tx\|_F \to 0$$

Por lo que $\{x_n\}$ es convergente para $\|\cdot\|_T$ a $x$, de donde $(E, \|\cdot\|_T)$ es completo.

Observemos ahora que $\|x\|_E \leqslant \|x\|_T$ para todo $x \in E$. Como las dos normales son completas, tenemos por el Corolario 2.6.2 que son equivalentes. Tenemos entonces que existe $k \geqslant 0$ de forma que:

$$\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F \leqslant k\|x\|_E \qquad \forall x \in E$$

de donde $k \geqslant 1$, con lo que:

$$\|Tx\|_F \leqslant (k-1)\|x\|_E \qquad \forall x \in E$$

Por lo que $T$ es continua en $E$. □

# 3. Topologías Débiles

## 3.1. Topologías iniciales

Trabajaremos sobre un conjunto $X$ y una familia de espacios topológicos $\{Y_i\}_{i\in I}$ junto con una familia de aplicaciones $\varphi_i : X \to Y_i, \quad \forall i \in I$.

Observamos que si consideramos en $X$ la topología discreta:

$$\tau_d = \{A : A \subset X\}$$

tenemos que $\varphi_i$ es continua, para todo $i \in I$. Sin embargo, hemos sido "muy brutos" al considerar esta topología sobre $X$. Nos preguntamos por definir alguna topología en $X$ que haga que todas las funciones de la familia $\{\varphi_i\}_{i\in I}$ sean continuas con el menor número de abiertos.

*Observación.* Observemos que como pretendemos que las funciones $\varphi_i$ sean continuas, necesitaremos que esta topología $\tau$ buscada verifique que:

$$\tau \supset \{\varphi_i^{-1}(\omega_i) : \omega_i \text{ es un abierto de } Y_i, \quad \forall i \in I\}$$

De esta forma, el problema podemos reformularlo como:

Dado un conjunto $X$ y una familia $\mathcal{U} = \{U_\lambda \subset X : \lambda \in \Lambda\}$, buscar la topología $\tau$ con menor cantidad de abiertos de forma que $\mathcal{U} \subset \tau$.

Para ello, si pretendemos que los $U_\lambda$ estén en $\tau$, estos serán abiertos, luego toda intersección finita de ellos lo seguirá siendo, con lo que la intersección finita de los conjuntos $U_\lambda$ también tiene que seguir estando en $\tau$. Es decir, si consideramos:

$$\mathcal{V} = \left\{ V = \bigcap_{i=1}^{n} U_{\lambda_i} : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

Tenemos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, y nos preguntamos si $\mathcal{V}$ es una topología. Observamos:

- Primero, que $\mathcal{V}$ es estable por intersecciones finitas.
- Sin embargo, la familia no es cerrada por uniones arbitrarias de elementos del conjunto.

Para solucionar el segundo problema, consideramos:

$$\left\{ \bigcup_{\eta\in\Lambda_0} V_\eta : V_\eta \in \mathcal{V}, \Lambda_0 \subset \Lambda \right\}$$

Y tenemos que la topología más pequeña que buscamos debe contener este conjunto. Se demuestra que este conjunto es, de hecho, una topología.

*Observación.* Observemos que el vacío es resultado de una unión vacía.
Sin embargo, faltaría unir el total.

¿Cómo se forma una base de entornos de dicha topología en $X$?
Resulta que una base de entornos es:

$$\left\{\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i) : V_i \text{ entorno de } \varphi_i(x)\in Y_i, \quad J\subset I \text{ finito}\right\}$$

Se verifica que el conjunto es una base de entornos.

Aunque no conozcamos en profundidad la topología (puesto que no hemos dado de forma explícita quiénes son sus abiertos), es sencillo en ocasiones probar ciertas propiedades topológicas, usando para ellos las dos proposiciones siguientes, que nos permiten comprobar propiedades sobre la topología inicial sin tener que usarla, sino tratar de buscar problemas equivalentes realizando composiciones con las aplicaciones $\varphi_i$ de la familia que nos da la topología inicial.

**Proposición 3.1.** *Sea $(X,\tau)$ con $\tau$ la topología inicial asociada a una familia de aplicaciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $X$ y $x\in X$:*

$$\{x_n\}\to x \iff \{\varphi_i(x_n)\}\to\varphi_i(x) \quad \forall i\in I$$

*Demostración.* Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Para cada $i\in I$, $\tau$ hace que $\varphi_i$ sea continua, por lo que:

$$\{x_n\}\to x\Longrightarrow\{\varphi_i(x_n)\}\to\varphi_i(x)$$

$\Longleftarrow$) Si consideramos un entorno $U$ de $x$, este ha de contener un entorno de la base de entornos, luego existe una familia finita $\{V_i\}_{i\in J}$ de entornos de $\varphi_i(x)$ en cada $Y_i$ con $i\in J$ de forma que:

$$W=\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i)$$

es un entorno básico contenido en $U$. Observemos que para cada $i\in J$ tenemos:

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_i(x)\in V_i\\ \{\varphi_i(x_n)\}\to\varphi_i(x)\end{array}\right\}\Longrightarrow \exists N_i\in\mathbb{N}:\varphi_i(x_n)\in V_i \quad \forall n\geqslant N_i$$

Sin embargo, como $J$ es finito, podemos tomar $N=\max\limits_{i\in J} N_i$ y tendremos que:

$$n\geqslant N\Longrightarrow\varphi_i(x_n)\in V_i \qquad \forall i\in J$$

de donde:

$$x_n\in W=\bigcap_{i\in J}\varphi_i^{-1}(V_i)\subset U \quad \forall n\geqslant N$$

Por lo que $\{x_n\}\to x$.

□

Por lo que conociendo la convergencia de las sucesiones en los espacios $Y_i$, estudiar la convergencia de $X$ con la topología inicial se reduce a estudiar las convergencias de sus imágenes por $\varphi_i$, esto hace fácil trabajar con sucesiones en la topología inicial. Sin embargo, no todos los conceptos topológicos se pueden caracterizar por sucesiones.

Otra propiedad útil de las topologías iniciales es la siguiente:

**Proposición 3.2.** *Sea $(X, \tau)$ con $\tau$ la topología inicial asociada a una familia de aplicaciones $\{\varphi_i\}_{i\in I}$. Si $Z$ es un espacio topológico y tenemos una aplicación entre espacios topológicos $\psi : Z \to X$, entonces:*

$$\psi \text{ es continua} \Longleftrightarrow \varphi_i \circ \psi : Z \to Y_i \text{ es continua} \quad \forall i \in I$$

*Demostración.* Por doble implicación:

$\Longrightarrow$) Si $\psi : Z \to X$ es continua, $\tau$ hace que cada $\varphi_i$ sea continua, por lo que $\varphi_i \circ \psi$ es continua.

$\Longleftarrow$) Para esta, tenemos que si $U \in \tau$, entonces podemos escribir:

$$U = \bigcup \bigcap_J \varphi_i^{-1}(\omega_i)$$

para ciertos conjuntos abiertos $\omega_i$ de $Y_i$, de donde:

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup \bigcap_J \psi^{-1}(\varphi_i^{-1}(\omega_i)) = \bigcup \bigcap_J (\varphi_i \circ \psi_i)^{-1}(\omega_i)$$

como la intersección finita de abiertos en $Z$ es un abierto de $Z$ y la unión arbitraria de abiertos de $Z$ también lo es, tenemos que $\psi^{-1}(U)$ es abierto en $Z$, para cada $U \in \tau$, por lo que $\psi$ es continua.

□

Y la idea es la misma de la Proposición anterior: aunque no conozcamos con exactitud los abiertos de la topología inicial, estudiar las funciones continuas $Z \to X$ se reduce al problema de estudiar la continuidad de cada una de las funciones resultantes con componer con $\varphi_i$, obteniendo funciones $Z \to Y_i$. Este procedimiento hace que sea muy fácil comprobar qué aplicaciones $Z \to X$ son continuas.

## 3.2. Topología débil

Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado, tenemos ya sobre $E$ una topología, la asociada a la norma $\|\cdot\|_E$, que denotaremos a veces por $\tau_{\|\cdot\|_E}$. Definiremos sobre este espacio $E$ otra topología:

**Definición 3.1** (Topología débil de un espacio normado)**.** Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ un espacio normado, definimos la topología débil en $E$ como la topología inicial en $E$ que hace que todas las aplicaciones de la familia $E^*$ sean continuas, y denotaremos a esta topología por $\sigma(E, E^*)$.

*Observación.* Observaciones que hay que tener en cuenta al trabajar con $\sigma(E, E^*)$:

- La notación $\sigma(E, E^*)$ hay que pensarla como la "topología débil en $E$ es la topología inicial en $E$ que hace continuos todos aquellos elementos de $E^*$".

- Tenemos $Y_f = \mathbb{R}$ para cada $f \in E^*$, donde tomamos como conjunto de índices $I = E^*$.

- Observemos que:
$$\sigma(E, E^*) \subset \tau_{\|\cdot\|_E}$$
Ya que toda aplicación $f \in E^*$ es continua en $\tau_{\|\cdot\|_E}$ y $\sigma(E, E^*)$ es, por definición de topología inicial, la topología más pequeña que hace que las aplicaciones de $E^*$ sean continuas.

Destacaremos a continuación propiedades destacables de la topología débil de un espacio normado $E$, donde siempre que hagamos referencia $\sigma(E, E^*)$, estaremos trabajando sobre un espacio normado $E$ arbitrario.

**Proposición 3.3.** *$\sigma(E, E^*)$ es Hausdorff.*

*Demostración.* Sean $x_1, x_2 \in E$ distintos, tomamos:

$$A = \{x_1\}, \qquad B = \{x_2\}$$

que son dos conjuntos convexos, disjuntos y cerrados para $\tau_{\|\cdot\|_E}$, lo que nos permite aplicar la segunda versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.22), obteniendo $f \in E^* \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que:

$$\langle f, x_1 \rangle < \alpha < \langle f, x_2 \rangle$$

de donde tomando:

$$\begin{aligned} x_1 \in \Theta_1 &:= \{x \in E : \langle f, x \rangle < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[) \in \sigma(E, E^*) \\ x_2 \in \Theta_2 &:= \{x \in E : \langle f, x \rangle > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha, +\infty[) \in \sigma(E, E^*) \end{aligned}$$

Tenemos que $\Theta_1, \Theta_2$ son disjuntos entre sí, con lo que nos dan la condición de Hausdorff que buscábamos. □

Veamos ahora una base de entornos en $\sigma(E, E^*)$, aplicando el procedimiento que hicimos anteriormente al construir la topología inicial.

**Proposición 3.4.** *Dado $x_0 \in E$ y $f_1, \ldots, f_k \in E^*$, tenemos que:*

1. *$V = V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) = \{x \in E : |\langle f_i, x - x_0 \rangle| < \varepsilon, \quad i \in \{1, \ldots, k\}\}$ es un entorno de $x_0$ en $\sigma(E, E^*)$, para todo $\varepsilon > 0$.*

2. *Además, $\mathcal{V} = \{V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) : \varepsilon > 0, \quad f_1, \ldots, f_k \in E^*\}$ es base de entornos de $x_0$ en $\sigma(E, E^*)$.*

*Demostración.* Veamos cada apartado:

1. Si definimos:
$$a_i = \langle f_i, x_0\rangle \qquad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$
dado $\varepsilon > 0$, tenemos que:
$$|\langle f_i, x\rangle - \langle f_i, x_0\rangle| < \varepsilon \Longleftrightarrow \langle f_i, x_0\rangle - \varepsilon \leqslant \langle f_i, x\rangle \leqslant \langle f_i, x_0\rangle + \varepsilon$$
que a su vez equivale a:
$$x \in f_i^{-1}\left(\langle f_i, x_0\rangle - \varepsilon, \langle f_i, x_0\rangle + \varepsilon\right)$$
Por lo que podemos escribir:
$$V = \bigcap_{i=1}^{k} f_i^{-1}(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$$
como $f_i$ es continua para la topología débil, el conjunto $V$ ha de ser abierto para $\sigma(E, E^*)$, y $x_0 \in V$, por lo que $V$ es un entorno abierto de $x_0$.

2. Para ver que es base de entornos, si tomamos $U$ un entorno abierto de $x_0$ en $\sigma(E, E^*)$, tenemos entonces que existe un entorno de la base de entornos de $\sigma(E, E^*)$, luego existen $f_1, \ldots, f_k \in E^*$ de forma que:
$$\bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}(V_j) \subset U$$
como $V_j$ es un entorno de $f_j(x_0)$ en la topología usual en $\mathbb{R}$, ha de existir $\varepsilon > 0$ de forma que:
$$]f_j(x_0) - \varepsilon, f_j(x_0) + \varepsilon[ \subset V_j \qquad \forall j \in \{1, \ldots, k\}$$
de donde:
$$V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) \subset \bigcap_{j=1}^{k} f_j^{-1}(V_j) \subset U$$

□

Esta proposición nos permite, tomado $x \in E$ y $U$ un abierto de $x$, han de existir $f_1, \ldots, f_k \in E^*$ y $\varepsilon > 0$ de forma que:
$$x \in V(f_1, \ldots, f_k; \varepsilon) \subset U$$

**Ejercicio 3.2.1.** Probar que $dimE < \infty \Longrightarrow \sigma(E, E^*) = \tau_{\|\cdot\|_E}$.

Si $dimE < \infty$, $E$ ha de ser isométrico a $\mathbb{R}^N$, para $N = dimE$, y tenemos que:
$$E^* = \{f : E \to \mathbb{R} \text{ de forma que } f \text{ es lineal}\}$$
Nos preguntamos ahora por la topología que hace que todas estas sean continuas. Si tomamos $\{x_n\}$ una sucesión de $\mathbb{R}^N$ Y $x \in \mathbb{R}^N$, tenemos que:
$$\{x_n\} \overset{(*)}{\to} x \Longleftrightarrow \{f(x_n)\} \to f(x) \qquad \forall f \in E^*$$

Además, una base de $E^*$ es $\{\pi_1, \ldots, \pi_N\}$, donde $\pi_i$ es la proyección en $i-$ésima coordenada, de donde:

$$\{f(x_n)\} \to f(x) \quad \forall f \in E^* \Longleftrightarrow \{x_n(i)\} = \{\pi_i(x_n)\} \to \pi_i(x) = x(i) \quad \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

y esta última condición es equivalente a decir que $\{x_n\}$ converge a $x$ con la norma de $E$.

Resumimos en la siguiente proposición cada una de las relaciones entre las convergencias de sucesiones en los distintos espacios topológicos que manejamos. Antes de ello, introducimos la siguiente notación:

**Notación.** Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es un espacio normado, consideraremos sobre él habitualmente dos topologías posiblemente distintas (por lo que obtendremos distintas convergencias de sucesiones):

$$\tau_{\|\cdot\|_E} \qquad \text{y} \qquad \sigma(E, E^*)$$

Si tenemos una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de $E$ y un punto $x \in E$, será costumbre para nosotros:

- notar por "$\{x_n\} \to x$" si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente en $\tau_{\|\cdot\|_E}$ al elemento $x$, diciendo en alguna ocasión que la sucesión $\{x_n\}$ "converge" o que "converge fuertemente" al elemento $x$.

- notar por "$\{x_n\} \rightharpoonup x$" si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente en $\sigma(E, E^*)$ al elemento $x$, diciendo en alguna ocasión que la sucesión $\{x_n\}$ "converge débilmente" al elemento $x$.

Todavía no está del todo claro la relación entre estas dos convergencias distintas de sucesiones de puntos de $E$, que aclararemos en la siguiente Proposición, pero ya podremos hablar de convergencia de sucesiones de puntos de $E$ de forma cómoda, sin confundir en ningún momento la convergencia de $\sigma(E, E^*)$ con la de $\tau_{\|\cdot\|_E}$.

**Proposición 3.5.** *Sea $E$ un espacio normado y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $E$:*

1. $\{x_n\} \rightharpoonup x \Longleftrightarrow \{\langle f, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle \quad \forall f \in E^*$.

2. $\{x_n\} \to x \Longrightarrow \{x_n\} \rightharpoonup x$.

3. $\{x_n\} \rightharpoonup x \Longrightarrow \{\|x_n\|\}$ *acotada y* $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.

4. *Tenemos:*

$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\} \rightharpoonup x \\ \{f_n\} \to f \end{array}\right\} \Longrightarrow \{\langle f_n, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle$$

*Demostración.* Demostramos cada una de las propiedades:

1. Es la Proposición 3.1 pero usando la notación para la topología débil de $E$.

2. Si tenemos $\{x_n\} \to x$, entonces para $f \in E^*$:

$$|\langle f, x_n - x\rangle| \leqslant \|f\|\|x_n - x\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

y como $\|x_n - x\| \to 0$, deducimos que $\langle f, x_n - x\rangle \to 0$, luego tenemos que:

$$\{\langle f, x_n\rangle\} \to \langle f, x\rangle \qquad \forall f \in E^*$$

y usando 1 tenemos que $\{x_n\} \rightharpoonup x$.

3. Tomamos $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, que verifica para $f \in E^*$:

$$f(B) = \{\langle f, x_n\rangle : n \in \mathbb{N}\}$$

Como $\{x_n\} \rightharpoonup x$, el apartado 1 nos dice que $f(B)$ es acotado, $\forall f \in E^*$. Por el Corolario 2.3.2 deducimos que $B$ es acotado, es decir, que $\{\|x_n\|\}$ está acotada.

Para la segunda parte, si tomamos $f \in E^*$, tenemos que:

$$|\langle f, x_n\rangle| \leqslant \|f\|\|x_n\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

si tomamos límite inferior:

$$\langle f, x\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, x_n\rangle = \liminf \langle f, x_n\rangle \leqslant \|f\| \liminf \|x_n\| \qquad \forall f \in E^*$$

En particular, si tomamos $\|f\| = 1$, tenemos que:

$$\|x\| = \sup_{\|f\|\leqslant 1} \langle f, x\rangle \leqslant \|f\| \liminf \|x_n\| = \liminf \|x_n\|$$

4. Estudiamos la diferencia:

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\leqslant |\langle f_n - f, x_n\rangle| + |\langle f, x_n - x\rangle| \\ &\leqslant \|f_n - f\|\|x_n\| + |\langle f, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Y tenemos que $\|f_n - f\| \to 0$, que $\{\|x_n\|\}$ está acotada, y que $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, de donde deducimos que $|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \to 0$.

□

Para entender mejor el punto 3 de esta Proposición, introducimos el siguiente concepto:

**Definición 3.2.** Sea $(E, \tau)$ un espcio topológico, sea $f : (E, \tau) \to \mathbb{R}$ una aplicción, decimos que la función $f$ es <u>secuencialmente semicontinua inferiormente</u> si se cumple que:

$$\{x_n\} \to x \Longrightarrow f(x) \leqslant \liminf f(x_n)$$

Notemos que sabíamos que la aplicación

$$\|\cdot\| : (E, \tau_{\|\cdot\|_E}) \to \mathbb{R}$$

es continua. Sin embargo, en vista de la Proposición y la Definición anterior, sabemos que la aplicación

$$\| \cdot \| : (E, \sigma(E, E^*)) \to \mathbb{R}$$

es secuencialmente semicontinua inferiormente.

Nos preguntamos ahora por el recícproco de la propiedad 3, si tenemos una sucesión $\{\|x_n\|\}$ acotada con $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de $E$, ¿será cierto que $\{x_n\} \rightharpoonup x$? La respuesta a esta pregunta es rotundamente negativa, pues sabemos que en dimensión finita $\sigma(E, E^*) = \tau_{\|\cdot\|_E}$, y sabemos de la existencia de sucesiones acotadas que no son convergentes en cualquier espacio normado $N-$dimensional.

Sin embargo, si recordamos el Teorema de Bolzano-Weierstrass, en todo espacio normado $N-$dimensional siempre que teníamos una sucesión acotada podríamos extraer una parcial suya convergente. Veremos próximamente que una propiedad similar a esta se cumple en la topología débil de $E$, lo que nos permitirá llegar a un Teorema que relacione los conjuntos compactos de $\sigma(E, E^*)$ con los conjuntos cerrados y acotados, brindándonos un espacio topológico con una cantidad abundante de conjuntos compactos, cosa que no sucede en $\tau_{\|\cdot\|_E}$ cuando la dimensión del espacio $E$ no es finita.

Esta propiedad de $\sigma(E, E^*)$ es totalmente natural, pues al considerar como $\sigma(E, E^*)$ la menor topología sobre $E$ que hace que las aplicaciones de $E^*$ sean continuas lo que estamos haciendo es eliminar de $\tau_{\|\cdot\|_E}$ abiertos que no nos interesa considerar en ciertos momentos, haciendo más fácil que un conjunto sea compacto, pues cuantos menos abiertos contenga una topología más fácil será que un conjunto sea compacto, por la propia definición de conjunto compacto en un espacio topológico general.